אינפי מתקדם 1 תשס"א תרגיל 8

25 בדצמבר 2000

אין שאלות על כופלי לגרנז'.

גרדיאנט ונקודות קיצון 1. תהי $f(x,y)=(y-x^2)(y-2x^2)$. הוכיחו כי לצמצום של f לכל ישר העובר דרך הראשית יש מינימום ב $(0,0)$, אבל $(0,0)$ איננה נקודת מינימום מקומי של f .

2. מצאו את המקסימום והמינימום של x^2-y^2 בעיגול $x^2+y^2\le 3$.

ב. מצאו את המקסימום והמינימום של xy בעיגול ברדיוס R סביב הראשית.

כלל השרשרת 3. תהי $f:R^2\to R$ גזירה ברציפות. נגדיר $F:R^2\to R$ ע"י הנוסחה $F(r,t)=f(r\cos t,rsint)$. הראו כי $\nabla F=\begin{pmatrix}\cos t & sint\\ -rsint & r\cos t\end{pmatrix}\nabla f$

משפט ההעתקה ההפוכה/הפתוחה/הסתומה 4. תהי $f=(f_1,f_2):R^2\to R^2$ $f_1(x,y)=e^x\cos y,$ $f_2(x,y)=e^x siny,$

א. מהו הטווח של f ?

ב.הראו שהיעקוביאן של f אינו מתאפס באף נקודה ב R^2 , אך f אינה חח"ע ב R^2.

ג. תהי $a=(0,\frac{\pi}{3})$, $b=f(a)$ ותהי g הפונקציה ההפכית של f המוגדרת בסביבה של b , כך ש $g(b)=a$. מצאו הצגה מפורשת של g , חשבו את $f'(a)$, $g'(b)$ ובדקו את הנוסחה $(g'(b))^{-1}=f(a)$.

5. $f:R^n\to R^n$ גזירה ברציפות ומקיימת $||f(x)-f(y)||\ge\lambda||x-y||$ לכל $x,y\in R^n$ $\lambda>0$ הוכיחו כי היעקוביאן של f אינו מתאפס ב R^n וש f הומיאומורפיזם של R^n על עצמו.

6. (סתומה) נגדיר פונקציה $f:R^5\to R^2$ ע"י

$$f_1(x_1,x_2,y_1,y_2,y_3)=2e^{x_1}+x_2y_1-4y_2+3$$
$$f_1(x_1,x_2,y_1,y_2,y_3)=x_2\cos x_1-6x_1+2y_1-y_3$$

תהינה $a=(0,1)$ $b=(3,2,7),$ אזי $f(a,b)=0$. הראו שהמשוואה $F(x,y)=0$ מגדירה את x כפונקציה של y בסביבות מתאימות של $b\in R^3$ ושל $a\in R^2$. חשבו את הנגזרת של פונקציה זו בנקודה b .

7. (סתומה) נניח שהמשוואה $F(x,y,z)=0$ מגדירה בסביבות מתאימות את z כפונקציה גזירה של x,y, את y כפונקציה גזירה של x,z , את x כפונקציה גזירה של z,y , נניח ש $\frac{\partial F}{\partial x}$, $\frac{\partial F}{\partial y}$, $\frac{\partial F}{\partial z}$,אינן מתאפסות בסביבות המתאימות. הוכיחו כי $\frac{\partial x}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial x}=-1$.

חנוכה שמח