

אינפי מתקדם 1 תשס"א תרגיל 6

3 בדצמבר 2000

1. $T : R^n \rightarrow R^m$ העתקה ליניארית. הוכח
 $\|T\| = \max\{\langle Tx, y \rangle \mid x \in R^n, y \in R^m, \|x\| = \|y\| = 1\}$ סלל קיום
 המקסימום.
2. $U, T : R^n \rightarrow R^n$ העתקות, $\|Ux\| = \|x\|$ לכל x (אורתוגונלית). הוכח $\|UT\| = \|T\|$.
3. $S : R^n \rightarrow R^n$ צמודה לעצמה ($S^* = S$) אזי $\|S\| = \max_{1 \leq i \leq n} |\lambda_i|$ כאשר λ_i ערכים עצמים של S .
4. $T : R^n \rightarrow R^n$ נגדיר $S = T^*T$ צמודה לעצמה. הוכח $\|T^*T\| = \|T\|^2$.
5. חשב את $\|T\|$ עבור

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$
6. תהי $T : R^n \rightarrow R^m$ נתונה ע"י המטריצה (a_{ij}) הוכיחו כי

$$\max_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}} a_{ij} \leq \|T\| \leq \left(\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij}^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$
7. $T, T : R^n \rightarrow R^n$ הפיכה $\|B - T\| \cdot \|T^{-1}\| < 1$ הוכיחו כי B הפיכה.
8. תהי $T, T_n : R^n \rightarrow R^n$ הפיכה ו $\|T_n - T\| \rightarrow 0$
9. הוכיחו כי החל מ $n \geq N$ מסוים T_n הפיכות.
10. הוכיחו כי $\|T_n^{-1} - T^{-1}\| \rightarrow 0$.
11. ראייתם בכיתה שהעתקה הפיכה ודטרמיננטה הינן פונקציות רציפות של ההעתקה (סקטור) במטריקה האוקלידית של R^{n^2} . בעזרת שאלות קודמות הסיקו שפונקציות אלו רציפות גם במרחב $Hom(R^n, R^m)$ עם הנורמה של ההעתקות הליניאריות. בהצלחה.