

אינפי מתקדם 1 תשס"א תרגיל 4

20 בנובמבר 2000

1. תנו דוגמא:

א. לפונקציה רציפה $f : R \rightarrow R$ וקבוצה פתוחה A כך ש $f(A)$ סגורה ולא פתוחה.
ב. לפונקציה רציפה $f : R^2 \rightarrow R$ וקבוצה סגורה A כך ש $f(A)$ פתוחה ולא סגורה.

פונקציה תקרא העתקה פתוחה אם היא מעתיקה קבוצה פתוחה לקבוצה פתוחה. פונקציה תקרא העתקה סגורה אם היא מעתיקה קבוצה סגורה לקבוצה סגורה.

2. הראו שפונקציה רציפה ממרחב מטרי קומפקטי למרחב מטרי היא העתקה סגורה.
ב. תנו דוגמא לכך שהיא לא בהכרח העתקה פתוחה.

ג. $f : X \rightarrow Y$ העתקה רציפה וחד חד ערכית של מרחב מטרי קומפקטי (X, d) לתוך מרחב מטרי (Y, ρ) . הוכח כי ההעתקה ההפוכה $f^{-1} : f(X) \rightarrow X$ הינה רציפה.
ד. תנו דוגמא נגדית עבור X שאינו קומפקטי.

3. $\chi_A = \begin{cases} 1 & x \in A \\ 0 & x \in A^c \end{cases}$. הראו כי נקודות אי הרציפות של χ_A הן שפת A , ∂A .

4. $f : R^2 \rightarrow R$ ע"י $f(x, y) = \frac{x^2}{y}$ עבור $y \neq 0$, $f(x, 0) = 0$ עבור $y = 0$. הוכחו ש f רציפה על כל ישר שעובר דרך הראשית. אבל f אינה רציפה ב R^2 .

5. $X, F \subseteq X$ מרחב מטרי $d(x, F)$ פונקצית מרחק כבתרגיל קודם. הראו ש $d(x, F)$ היא פונקציה רציפה של x (רמז ליפשיץ מתרגיל קודם).

6. (X, d) מרחב מטרי. $A, B \subseteq X$ לא ריקות ו $\overline{A} \cap \overline{B} = \emptyset$. הוכחו ש

$$d(x, A) = 0 \Leftrightarrow x \in \overline{A}$$

ב. בנו פונקציה $f : X \rightarrow R$ המקימות:

1. רציפה.

2. $-1 \leq f(x) \leq 1$ לכל x .

3. $f(x) = 1$ לכל $x \in A$.

4. $f(x) = -1$ לכל $x \in B$.

ג. חסק שקימות קבוצות פתוחות U, V כך ש $U \cap V = \emptyset, B \subseteq V, A \subseteq U$.

0.