אינפי מתקדם תרגיל 3

13 בנובמבר 2000

יהי (X,d) מ"מ $x \in A \subseteq X$ המרחק בין x ל A מוגדר ע"י $d(x,A) = inf_{a\in A} d(x,a)$. נאמר שהמרחק מתקבל אם יש $a_0 \in A$ כך ש-$d(x,A) = d(x,a_0)$. עבור $A,B \subseteq X$ לא ריקות נגדיר $d(B,A) = inf_{a\in A, b\in B} d(b,a)$. נאמר שהמרחק מתקבל אם יש

$a_0 \in A, b_0 \in B$ כך ש-$d(B,A) = d(b_o,a_0)$.

1)א. תהא $F \subseteq X$ סגורה הראו שהפונקציה $f(x) = d(x,F) : X \to R$ מקיימת $|f(x) - f(y)| \le Md(x,y)$ לכל $x,y \in X$. M קבוע כלשהו נקרא קבוע ליפשיץ.

ב. תנו דוגמא למ"מ $A,B \subseteq X$ A קומפקטית B סגורה והמרחק בין שתי הקבוצות לא מתקבל.

ג. (R^n, d) מ"מ עם המטריקה הרגילה. תנו דוגמא ל A,B סגורות כך שהמרחק ביניהן לא מתקבל.

ד. (R^n, d) מ"מ עם המטריקה הרגילה. הראו כי אם A קומפקטית B סגורה אזי המרחק ביניהן מתקבל.

2. $Y \subseteq X$ מרחבים מטרים (עם מטריקה מושרית) $A \subseteq Y$ קומפקטית ב Y אםם A קומפקטית ב X.

יהי (X,d) מ"מ. קבוצה $D \subseteq X$ תקרא ϵ מופרדת אם לכל $x,y \in D$ $x \ne y$ $d(x,y) \ge \epsilon$. קבוצה $S \subseteq X$ תקרא ϵ פורשת אם לכל $x \in X$ יש $y \in S$ $d(x,y) \le \epsilon$, כלומר $X = \bigcup_{y\in S} B(y,\epsilon)$ (B כדור) .

3א. הוכח שאם (X,d) קומפקטי אזי כל קבוצה ϵ מופרדת הינה סופית. $\epsilon > 0$.

ב. הוכח שאם S ϵ מופרדת מקסימלית, כלומר לא מוכלת באף קבוצה ϵ מופרדת, אזי S 2ϵ פורשת.

ג. שולחן מלבני מכוסה במטבעות כך ששום מטבע לא נוגע בשני, ואי אפשר להוסיף מטבעות. על השלחן יש 1000 מטבעות. הוכיחו שלשם כיסוי השלחן (כולל מטבע על מטבע) מספיקים 4000 מטבעות.

4. יהי (X,d) מ"מ ו $K_n \subseteq X$ סדרת קבוצות קומפקטיות כך ש-
$K_1 \supseteq K_2 \supseteq K_3 \supseteq \cdots$ הוכח שאם כל $K_n \ne \emptyset$ אזי $\bigcap_{n=1}^{\infty} K_n \ne \emptyset$.

יהיו (X_1,d_1) ,....,(X_n,d_n) נגדיר מרחב מכפלה

$$X = \{\hat{x} = (x_1, \dots, x_n) : x_i \in X_i, i = 1..n\}$$

עם מטריקה

$d((x_1,\dots,x_n),(y_1,\dots,y_n)) = \sum_{i=1}^n d_i(x_i,y_i)$.

5. הוכח שזהו אכן מ"מ, וש $\hat{x}^k \to \hat{x} \Leftrightarrow x_j^k \to x_j$ לכל $j=1..n$.

ב. הוכח : אם (X_i,d_i) מ"מ קומפקטים אז (X,d) קומפקטי.

6. (X,d) מ"מ הראו כי $\overline{A}$ היא חיתוך כל הסגורות המכילות את A .

ב. הראו כי A° היא איחוד כל הפתוחות המוכלות ב A .

ג. $\overline{A}=\overline{\overline{A}}$, $\overline{A}\bigcup\overline{B}=\overline{A\bigcup B}$, $\overline{A}\bigcap\overline{B}\supseteq\overline{A\bigcap B}$ תנו דוגמא להכלה ממש.

יהי (X,d) מ"מ קומפקטי נגדיר $X^\infty = \{\{x_n\}_{n=1}^\infty : x_i \in X\}$ ז"א איברי X הינם סדרות אינסופיות. נגדיר

$$d^\infty(\{x_n\}_{n=1}^\infty,\{y_n\}_{n=1}^\infty) = \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{2^n} d(x_n,y_n) \quad .$$

7א. הוכח ש d^∞ מוגדרת היטב, ומטריקה.

ב. וש $\hat{x}^k \to \hat{x} \Leftrightarrow x_j^k \to x_j$ לכל $j=1,2,..$.

ג. הוכח ש (X^∞,d^∞) מ"מ קומפקטי.

1 שאלות 3ג, 7 קשות.