

תרגיל 2 אינפי מתקדם 1 תשס"א

2 בנובמבר 2000

1 .

$X = C([0, 1])$ מרחב כל הפונקציות הרציפות על קטע סגור $[0, 1]$. נגדיר 3 מטריקות על X :

$$d_1(f, g) = \int_0^1 |f(x) - g(x)| dx \quad d_2(f, g) = \left[\int_0^1 |f(x) - g(x)|^2 dx \right]^{\frac{1}{2}}$$

$$d_\infty(f, g) = \max_{0 \leq x \leq 1} |f(x) - g(x)|$$

1. בדוק שאלו אכן מטריקות.

2. הוכח שלכל $f, g \in X$, $d_1(f, g) \leq d_2(f, g) \leq d_\infty(f, g)$, רמז: אי שוויון קושי שורץ.

3. תן דוגמה לסדרת פונקציות $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ כך ש- $d_2(f_n, f) \rightarrow 0$ אבל $d_\infty(f_n, f) = 1$.

4. תן דוגמה לסדרת פונקציות $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ כך ש- $d_1(f_n, f) \rightarrow 0$ אבל $d_2(f_n, f) = 1$.

5. האם $d_1(f_n, f) \rightarrow 0 \Leftrightarrow f_n(x) \rightarrow f(x)$ לכל $0 \leq x \leq 1$?

6. האם $d_1(f_n, f) \rightarrow 0 \Leftrightarrow f_n(x) \rightarrow f(x)$ לכל $0 \leq x \leq 1$?

2 .

יהי $\bar{x} = (x_1, \dots, x_n) \in R^n$ הגדרנו לכל $p \geq 1$ את $\|x\|_p$ הראה כי $\|x\|_p$ הינה פונקציה יורדת של p וכן הראה ש- $\lim_{p \rightarrow \infty} \|x\|_p = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$.