פתרון לתרגיל מס' 9 בטופולוגיה

① אחד הייצוגים ל-$\mathbb{RP}^n$ הוא $S^n/_{x\sim -x}$.

לכן צ"ל: $S^1/_{x\sim -x} \cong S^1$.

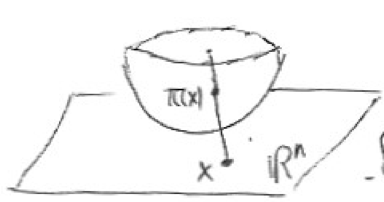
כה נעשה ברוח תרגילים קודמים: מגדירים $f: S^1 \to S^1$

$z \mapsto z^2$.

כיון ש-$S^1=\{z\in\mathbb{C} \mid |z|=1\}$ מוכל במישור המרוכב. S^1 קומפקטית והאוסדורף, f רציפה, לכן f מגדירה הומאו $S^1/_{S(f)} \cong S^1$ (f גם על כמובן).

$S(f)$ מזהה בדיוק שתי נקודות אנטיפודליות: $f(z)=f(w) \Leftrightarrow z=-w$.

② π היא בדיוק ההטלה שציירנו בשיעור (משמאל), רק שחצי הספירה של התמונה היא הפוכה (סובבו את הדף ב-180°...). כמובן ב-$\mathbb{RP}^n$ אין הבדל.



ראשית, π מוגדרת היטב (לתוך S^n ולכן לתוך $\mathbb{P}^n$ שהוא מנה שלה).

π חח"ע (בדיקה ישירה), רציפה (המנה $\|(1,x_1,\dots,x_n)\|$ לא מתאפסת והכל הרכבה של רציפות), וההופכית:

$$\pi^{-1}: \pi(\mathbb{R}^n) \subseteq \mathbb{P}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

$$(y_0,y_1,\dots,y_n) \longmapsto \left(\frac{y_1}{y_0},\dots,\frac{y_n}{y_0}\right)$$

$$y_0\neq 0$$

גם היא רציפה.

התמונה של π היא $\pi(\mathbb{R}^n)=\{(y_0,y_1,\dots,y_n)\in\mathbb{P}^n \mid y_0\neq 0\}$. ברור שהקואורדינטה הראשונה בתמונה $\frac{1}{\|(1,x_1,\dots,x_n)\|}$ אינה מתאפסת, וכן לכל נק' עם התכונה הנ"ל π^{-1} מוגדרת והופכית ל-π (לכן הנק' $(y_0,y_1,\dots,y_n)$, $y_0\neq 0$ מתקבלת).

③* רעיון (המשך ההפוך לפורמלי יחסית בקלות):

טרנספורמציה ב-$SO(3)$ מוגדרת ע"י ישר ב-$\mathbb{R}^3$ וזווית הסיבוב α [הישר דרך הראשית].

הישר מוגדר ע"י וקטור כיוון, כשהבחירה בין $\vec{n}$ ל-$-\vec{n}$ תיתן אותו ישר, אך כדי לשמור על אותו סיבוב צריך להעביר את α ל-$-\alpha$ ($\alpha\in[-\pi,\pi]$).

סימון: $S^3 \longrightarrow SO(3)$

$(x_1,x_2,x_3,x_4) \longmapsto$ סיבוב בו $\vec{n}=\frac{(x_1,x_2,x_3)}{\|(x_1,x_2,x_3)\|}$, $\alpha=\pi\cdot x_4$

f היא העתקה רציפה ממרחב קומפקטי להאוסדורף, לכן מגדירה הומיאו
מין מרחב המנה $S^3/_{S(f)}$ לתמונה $SO(3)$.
אבל היחס ש- f משרה הוא בדיוק $(x_1,x_2,x_3,x_4)\sim(-x_1,-x_2,-x_3,-x_4)$.

<u>דרך אחרת</u> (יותר מפורטת):

ישנה העתקת מנה $S^2\times[0,2\pi]\to SO(3)$

$(l,\alpha)\longmapsto$ סיבוב סביב l בזווית α

המשרה את ההומיאומורפיזם: $SO(3)\cong\dfrac{S^2\times[0,2\pi]}{\left\{\begin{matrix}(l,\alpha)\sim(-l,2\pi-\alpha)\\ (l,2\pi)\sim(n,2\pi)\end{matrix}\right\}}$ $(\forall l,n\in S^2)$.

נגדיר העתקת מנה נוספת $S^2\times[-1,1]\to S^3$ שמגדירה את היחסים:

$\forall l,n\in S^2\quad (l,1)\sim(n,1)$

$(l,-1)\sim(n,-1)$.

זאת עושים ע"י: $((l_1,l_2,l_3),t)\mapsto(\sqrt{1-t^2}\,l_1,\sqrt{1-t^2}\,l_2,\sqrt{1-t^2}\,l_3,t)$

(בדוק שזה אכן לתוך S^3!)

אם מקבעים את t ההעתקה נותנת חתך של S^3 בגובה t.

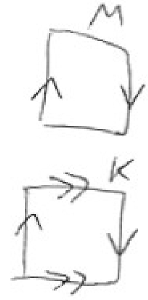
לבסוף, ישנה העתקה $S^3\to P^3$ המזהה $x\sim -x$.

נרכיב כעת (נשים לב שבכל שלב הזיהוי מוגדר היטב כי מכבד את היחסים!):

$$SO(3)\cong\frac{S^2\times[0,2\pi]}{\left\{\begin{matrix}(l,\alpha)\sim(-l,2\pi-\alpha)\\ (l,2\pi)\sim(n,2\pi)\end{matrix}\right\}}\cong\frac{S^2\times[-1,1]}{\left\{\begin{matrix}(l,\alpha)\sim(-l,-\alpha)\\ (l,1)\sim(n,1)\end{matrix}\right\}}\cong\frac{S^3}{x\sim -x}=P^3$$

אפשר לומר שגם $(l,-1)\sim(n,-1)$ אך מיותר!

שים לב, שהשתמשנו ב- $S^3\cong\dfrac{S^2\times[-1,1]}{\left\{\begin{matrix}(l,1)\sim(n,1)\\ (l,-1)\sim(n,-1)\end{matrix}\right\}}$ והוספנו את היחס $x\sim -x$.



(4) (k) מאת ההגדרות: $M = I^2 / (0,t)\sim(1,1-t)$

ואילו: $K = \dfrac{I^2}{\left\{\begin{matrix}(0,t)\sim(1,1-t)\\ (s,0)\sim(s,1)\end{matrix}\right\}} \simeq \dfrac{M}{\{(s,0)\sim(s,1)\}}$

(ב) כזכור מתרגול קודם $S^1\times S^1 \simeq \dfrac{I^2}{\left\{\begin{matrix}(0,t)\sim(1,t)\\ (t,0)\sim(t,1)\end{matrix}\right\}}$

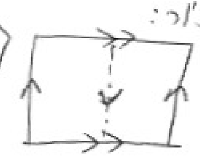
ע"י העתקה $I^2 \to S^1\times S^1$ שהיא העתקת מנה.
$(t,s)\mapsto(e^{2\pi i t}, e^{2\pi i s})$

אם נוסף את היחס $(z,w)\sim(-z,\bar{w})$ על $S^1\times S^1$, זה יהיה כמו להוסיף את היחס $(t,s)\sim(t+\frac12,1-s)$ ב- $I\times I$ (בדוק זאת!)

לכן:

$$\frac{S^1\times S^1}{(z,w)\sim(-z,\bar{w})} \simeq \frac{I^2}{\left\{\begin{matrix}(0,s)\sim(1,s)\\ (t,0)\sim(t,1)\\ (t,s)\sim(t+\frac12,1-s)\end{matrix}\right\}} \simeq \frac{[0,\frac12]\times[0,1]}{\left\{\begin{matrix}(t,0)\sim(t,1)\\ (0,s)\sim(\frac12,1-s)\end{matrix}\right\}}$$

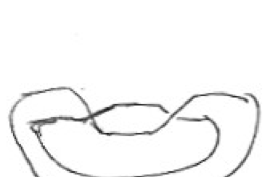
בציור:

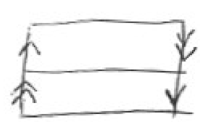


נשים לב שיש נציג אחד לכל מחלקת שקילות ב- $[0,\frac12]\times[0,1]$, חוץ מהשפה עליה עדיין צריך לכתוב את הזיהוי.

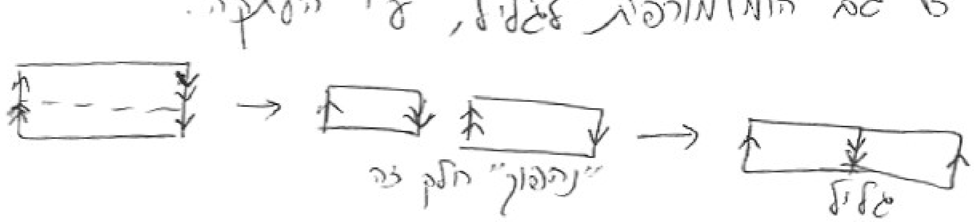
זה הומאומורפי לבקבוק קליין ע"י כך ש- $[0,1]\simeq[0,\frac12]$.

(5) התוצאה המתקבלת היא טבעת עם שני "טוויסטים":





ראשית, אפשר לצייר ולראות;
שנית, כל חצי מלבן שנוצר יוצר twist, ממש כמו בטבעת מוביוס כשמדביקים אותה ב- R^3.
אבל, צורה זו גם הומיאומורפית לגליל, ע"י העתקה.



מובן שניתן לכתוב נוסחאות מדויקות לכך.

__הכללה:__ אם מדביקים צלעות נגדיות של מלבן לאחר מס' אי-זוגי של טוויסטים $\simeq M$
לאחר מס' זוגי — " — $\simeq$ גליל.