פתרון תרגיל 7 בטופולוגיה

① C_2 (מניה שניה) - לא! נניח שיש בסיס בן-מניה $\{U_n\}$. אז $|\mathbb{R}\setminus U_n|<\infty$ לכל n, לכן $|\bigcup_{n=1}^{\infty}(\mathbb{R}\setminus U_n)|\le\aleph_0$.
לכן קיים $x\in\mathbb{R}\setminus(\bigcup_{n=1}^{\infty}U_n^c)=\bigcap_{n=1}^{\infty}U_n$ (משיקולי עוצמות).
אזי הקבוצה הפתוחה $\mathbb{R}\setminus\{x\}$ אינה ניתנת לכתיבה כאיחוד כלשהו של U_n-ים (x תמיד יהיה באיחוד כזה).

C_1 (מניה ראשונה) - גם לא! מאותו שיקול, אם קיים בסיס בן-מניה בנק' מסוימת x_0, נסמנו $\{U_n\}_{n=1}^{\infty}$, אז משיקולי עוצמות יש $y\in\bigcap_{n=1}^{\infty}(U_n\setminus\{x\})$. אזי $\mathbb{R}\setminus\{y\}$ סביבה של x שאינה ניתנת כאיחוד של U_n-ים.

Z (ספרבילי) - כן! $\mathbb{Q}$ צפופה ב-$\mathbb{R}$, וזו טופ' גסה יותר, לכן ודאי $\mathbb{Q}$ צפופה גם כאן.

② ראינו בכיתה משפט: מטריזבילי + ספרבילי $\Leftarrow$ C_2 (מניה שניה).
ידוע שהישר העשיר ספרבילי (ע"י $\mathbb{Q}$). אילו היה מטריזבילי, היה נובע שהוא C_2. נראה שאינו C_2 ובכך נסיים.
יהי B בסיס בן-מניה של הישר העשיר (בשלילה). אז לכל $x\in\mathbb{R}$ נבחר $B_x\in B$ כך ש-$x\in B_x\subseteq[x,x+1)$. הקבוצות $\{B_x\}_{x\in\mathbb{R}}$ זרות בזוגות (אם $x\neq y$, אז נניח $x<y$; $x\notin B_y$ אך $x\in B_x$. לכן $B_x\neq B_y$).
ומספרן של $\{B_x\}_{x\in\mathbb{R}}$ אינו בן-מניה. לפיכך האוסף B אינו בן-מניה.

③ תהי $A\subseteq\mathbb{R}$ כלשהי. נניח כי $A\subseteq\bigcup_{\alpha\in J}U_\alpha$ כאשר $U_\alpha\in\Omega_{cof}$ כלומר $|\mathbb{R}\setminus U_\alpha|<\infty$ לכל α. יש להראות קיום של תת-כיסוי סופי.
נבחר $\alpha_0\in J$ כלשהו. אז U_{α_0} מכסה את כל A פרט למספר סופי של נקודות $x_1,\dots,x_n$ (כי $A\setminus U_{\alpha_0}\subseteq\mathbb{R}\setminus U_{\alpha_0}=\{x_1\dots x_N\}$).
לכל $1\le i\le n$ קיימת U_{α_i} כך ש-$x_i\in U_{\alpha_i}$. לכן $A\subseteq\bigcup_{i=0}^{n}U_{\alpha_i}$ כנדרש.

(4) (א) $GL(n)$ אינה קומפקטית, כי אינה חסומה.

(כזכור, ב- $\mathbb{R}^m$ קב' היא קומפ' $\Leftrightarrow$ היא סגורה וחסומה).

(ב) $SL(n)$ אמנם סגורה (במקור של $\det^{-1}$), אך לא חסומה: ניתן לבנות מטריצה A עם דטרמיננטה 1, כך ש- a_{11} גדול כרצוננו. זה מראה חוסר-חסימות לפי מטריקת ∞.

(ג) $O(n)$ קומפקטית. היא סגורה, כיוון שניתן לכתוב את התנאי $AA^t=I$ כמערכת משוואות לינארית ב- $a_{11}, a_{12}, \ldots$ (מקדמי המטריצה).

המערכת תהיה $F(a_{11},a_{12},\ldots)=(1,0,0,\ldots)$ כאשר F רציפה, לכן

וקטור מתאים ל-I המטריצה I בפרישה

$F^{-1}\{(1,0,0,\ldots 0,1,0,\ldots)\}$ זו קב' סגורה, וזו בדיוק קב' הפתרונות.

$O(n)$ חסומה, כי $|a_{ij}|\le 1$ לכל $1\le i,j\le n$ אם A אורתוגונלית (למעשה, הנורמה של כל עמודה $=1$). לכן $O(n)\subseteq B(0,n)$.

(5) כיוון ש- X מרחב T_2, כל קב' קומפקטית היא סגורה.

J_k סגורה לכל k $\Leftarrow$ $J_\infty=\bigcap_{k=1}^{\infty} J_k$ סגורה. אם $J_\infty=\emptyset$ היא קשירה (דרך אגב, זה לא יכול לקרות - הוכחה דומה לקטעים מקוננים של קנטור).

$J_\infty\neq\emptyset$. נניח בשלילה ש- $J_\infty=A\cup B$ כש- B, A זרות וסגורות ב- J_∞.

אך J_∞ סגורה, לכן B, A גם סגורות ב- X (!), ועדיין זרות.

אפשר להניח ש- $X=J_1$ (אחרת נחתוך הכל עם J_1). לכן X מרחב קומפקטי ו- T_2, ממילא הוא נורמלי. $\Leftarrow$ קיימות U_1, U_2 פתוחות ב- X כך ש- $A\subset U_1$, $B\subset U_2$, $U_1\cap U_2=\emptyset$.

כעת $J_\infty\cap(U_1\cup U_2)^c=\emptyset$, לכן מתכונה שקולה לקומפקטיות (לקיחת משלים לתכונה הרגילה), קיים תת-חיתוך סופי שהוא ריק: $\emptyset=(U_1\cap U_2)^c\cap(J_{k_1}\cap\ldots\cap J_{k_m})$

כיוון שהקבוצות מוכלות, $J_{k_1}\cap\ldots\cap J_{k_m}=J_l$ כש- $l=\max\limits_{1\le i\le m} k_i$. לכן $J_l\subseteq U_1\cup U_2$. לכן $J_l\cap U_1$, $J_l\cap U_2$ הן קב' זרות, פתוחות ב- J_l ולא ריקות ($\emptyset\neq J_\infty\cap A\subseteq J_\infty\cap U_1\subseteq J_l\cap U_1$) וזו סתירה לקשירות J_l.

דברים נוספים:

④(ג) - $O(n)$ סגורה, לפי סגירות סדרתית (שקול, כי זהו מרחב מטרי): אם $A_n \to A$, $A_n \in O(n)$ אז נקבל גם $A_n^T \to A^T$ ולכן $I = A_n \cdot A_n^T \to A \cdot A^T$, כלומר $A \in O(n)$.

② בתרגול ראינו שהישר העשיר R_{rich} מקיים ש- $R_{rich} \times R_{rich}$ אינו נורמלי (כי האלכסון שלו $L = \{(-x,x) \mid x \in R_{rich}\}$ דיסקרטי...). אילו R_{rich} היה מטריזבילי, כך גם המכפלה $R_{rich} \times R_{rich}$ הייתה מטריזבילית, וזו סתירה. (מטרי ⇐ נורמלי).