פתרון תרגיל 6 בטופולוגיה

① התכונות T_1, T_2, T_3 (ולמעשה גם T_0) תורשתיות מנימוקים דומים, לכן נוכיח לדוגמה עבור T_3.

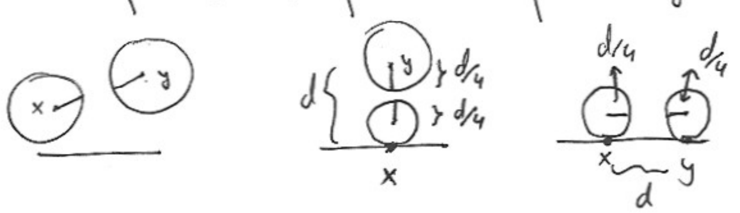
יהי X מ"ט שהוא T_3. תהי $Y\subseteq X$, נראה ש-Y בטופ' מושרית הוא T_3.
יהי $y\in Y$, $F\subseteq Y$ סגורה ב-Y כך ש- $y\notin F$. קיימת קב' סגורה ב-X, E, כך ש- $F=E\cap Y$. מתקיים $y\notin E$ (כי אחרת $y\in E\cap Y=F$, סתירה!)
לכן, מתכונת T_3 של X, קיימות קב' פתוחות זרות U, V כך ש- $F\subseteq V$, $y\in U$.
אז ברור ש- $V\cap Y$, $U\cap Y$ הן קב' זרות ופתוחות ב-Y, כך ש- $F\subseteq V\cap Y$, $y\in U\cap Y$.

<u>שימו לב!</u> טיעון זה לא עובד ל-T_4, כיוון שאם A, B סגורות זרות ב-Y, לא ברור שבאו מקב' סגורות <u>זרות</u> ב-X. ואכן, <u>T_4 אינו תורשתי</u>.

② (⇐) נניח ש-X הוא T_3. תהי U קב' פתוחה, $x\in U$.
אז $F=X\setminus U$ סגורה, ומתכונת T_3 ניתן להפרידה מ-x:
קיימות קב' פתוחות V_1, V_2 זרות כך ש- $x\in V_1$, $F\subseteq V_2$.
אז $V_1\subseteq V_2^c\subseteq \underset{U}{\underset{\parallel}{F^c}}$ אך כיוון ש- V_2^c סגורה, נובע $x\in V_1\subseteq \bar V_1\subseteq V_2^c\subseteq U$, כנדרש.

(⇒) נניח שמתקיימת התכונה. יהי $x\notin F$ כש-F סגורה. נסמן $U=F^c$ - פתוחה, $x\in U$. לכן יש V פתוחה כך ש- $x\in V\subseteq \bar V\subseteq U$. אז $\bar V^c$ פתוחה, כך ש- $F=U^c\subseteq \bar V^c$; כלומר V, $\bar V^c$ הן סביבות זרות המפרידות בין x ל-F.

③ א) האוסדורף: נחלק ל-3 מקרים (זה רק ציור סכמטי, לא הוכחה!):

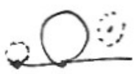


לכן בכל מקרה כדורים ברדיוס $d/4$ מפרידים בין <u>x</u> ל-<u>y</u> (d מרחק אוקלידי)

ב) רגולריות: די להראות T_3; נעשה זאת לפי הקריטריון בשאלה ②.
נקח U פתוחה, $\underline{x}\in U$. מספיק להוכיח עבור U כדור (או כדור מורחב).

- אם $\underline{x}\in H=\{(t_1,t_2)|t_2>0\}$, אז $U=B(\underline{x},r)$ ל-$r>0$ מתאים (כדור אוקלידי), וברור מ-T_3 של $\mathbb{R}^2$ כי מתקיים הקריטריון. [או, נקח $V=B(\underline{x},\frac{r}{2})$].
- אם $\underline{x}\in \mathbb{R}\times\{0\}$, אז $U=B((x_1,r),r)\cup\{\underline{x}\}$. נראה ש- $V=B((x_1,\frac{r}{2}),\frac{r}{2})\cup\{\underline{x}\}$ כנדרש.

לשם כך, יש להשתכנע כי $\underbrace{\overline{B((x_1,\frac{r}{2}),\frac{r}{2})}}_{\text{סגור ב-}\mathbb{R}^2} \cup \{x\} = \overline{B((x_1,\frac{r}{2}),\frac{r}{2})} \leftarrow$ סגור נמיצקי



(כלומר, הסגור של כל כדור-נמיצקי הוא כמו הסגור ב-$\mathbb{R}^2$)

זה אכן ברור: כל נק' מחוץ לקב' הימנית יש לה סביבה שאינה מקב' השמאלית וההיפך (שוב, מחלקים למקרים - אם הנק' ב-$H=\mathbb{R}\times(0,\infty)$ או ב-$\mathbb{R}\times\{0\}$).

ג) הטופ' על $\mathbb{R}$ דיסקרטית: $\{x\} = \mathbb{R}\cap\Big(\underbrace{\{x\}\cup B((x,r),r)}_{\text{קב' פתוחה.}}\Big)$

ד) כפי שנעשה בתרגול: $\mathbb{R}$ קב' סגורה, אם N היה נורמלי היינו מקבלים מנוסחת טייצה $2^{2^{\aleph_0}} = |\mathbb{R}^{\mathbb{R}}| \underset{\downarrow}{=} |C(\mathbb{R})| \le |C(N)|$.

$\mathbb{R}$ דיסקרטית בטופ' מושרית

אבל מאידך, $\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}$ צפופה ב-N, לכן:

$$|C(N)| \le |C(\mathbb{Q}\times\mathbb{Q})| = 2^{\aleph_0}$$

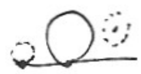
קיבלנו $2^{2^{\aleph_0}} < 2^{\aleph_0}$, סתירה!

<u>הערה:</u> יש גם דרך ישירה. ניתן להראות ש-$\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ הן שתי קב' סגורות לא ניתנות להפרדה (תודה ליונתן חרמון).

לשם כך, יש להשתכנע כי $\overline{B((x,\frac{r}{2}),\frac{r}{2})\cup\{x\}} = \overline{B((x,\frac{r}{2}),\frac{r}{2})}$

סגור נמיצקי ← (on the left-hand side); סגור ב- $\mathbb{R}^2$ (on the right-hand side)

(כלומר, הסגור של כל כדור - נמיצקי הוא כמו הסגור ב- $\mathbb{R}^2$)



זה אכן ברור: כל נק' מחוץ לקב' הימנית יש לה סביבה שאינה מקבי' השמאלית וההיפך (שוב, מחלקים למקרים - אם הנק' ב- $\mathbb{R}\times(0,\infty)=H$ או ב- $\mathbb{R}\times\{0\}$).

ג) הטופ' על R דיסקרטית: $\{x\} = \mathbb{R}\cap\underbrace{\left(\{x\}\cup B((x,r),r)\right)}_{\text{קב' פתוחה}}$

ד) כפי שנעשה בתרגיל: R קב' סגורה, אם N היה נורמלי היינו מקבלים ממשפט טיצה $2^{2^{\aleph_0}} = |\mathbb{R}^{\mathbb{R}}| \underset{\downarrow}{=} |C(\mathbb{R})| \le |C(N)|$.

R דיסקרטית בטופ' מושרית

אבל מאידך, $\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}$ צפופה ב- N, לכן:

$$|C(N)| \le |C(\mathbb{Q}\times\mathbb{Q})| = 2^{\aleph_0}$$

קיבלנו $2^{2^{\aleph_0}} < 2^{\aleph_0}$, סתירה!

<u>הערה</u>: יש גם דרך ישירה. ניתן להראות ש- $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ הן שתי קב' סגורות לא ניתנות להפרדה (תודה ליונתן חרמון).