טופולוגיה - ברון תרגיל מס 5

① נגדיר $\mathcal{E}=\{U\subseteq X \mid U$ קשירה מסילתית ופתוחה$\}$. אזי $\mathcal{E}$ מקיים:

(בסיס האינדוקציה) לכל $x\in X$ קיימת $U\in\mathcal{E}$ כך ש- $x\in U$ (מהנתון).

(צעד האינד') אם $U_1,U_2\in\mathcal{E}$, $U_1\cap U_2\neq\emptyset$, אז $U_1\cup U_2\in\mathcal{E}$ כי קשירה מסילתית לפי משפט. בדומה, אם $\{U_\alpha\}_{\alpha\in I}\subseteq\mathcal{E}$ כך ש- $U_\alpha\cap U_\beta\neq\emptyset$ לכל $\alpha,\beta\in I$, אז $\bigcup U_\alpha\in\mathcal{E}$ קשיר מסילתית (מאותו משפט).

מסקנה: $X\in\mathcal{E}$, כלומר X קשיר מסילתית.

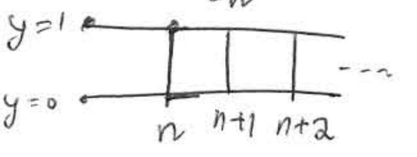
② כל קבוצה היא קשירה בטופ' החץ. נוכיח:

תהי $A\subseteq\mathbb{R}_{\to}$ כלשהי.

נניח ש- $A=U_1\cup U_2$ כאשר $\{U_i\}_{i=1,2}$ זרות, פתוחות.

כיוון שלכל שתי קב' בטופ' זו או ש- $U_1\subseteq U_2$ או ש- $U_2\subseteq U_1$, זו סתירה.

③ א. לא: נקח $A=\mathbb{Q}$, $B=\mathbb{Q}^c$ ב- $\mathbb{R}$.



ב. לא: נקח "סולם" כמו בציור.

אזי J_n סגורה וקשירה לכל $n\in\mathbb{N}$,

אבל לא כך $\bigcap J_n=\{y=0\}\cup\{y=1\}$.

④ בתנאים הנתונים, $f(X)\subseteq\mathbb{R}$ קשירה (כתמונה רציפה של קב' קשירה).

בכיתה הוכחנו שקב' קשירה בישר היא קטע;

לכן $f(X)\supseteq[f(a),f(b)]$

(אם תרצו, $f(X)$ מכילה את המסילה (היחידה) מ- $f(a)$ ל- $f(b)$).

כעת מהנתון ברור ש- $0\in f(X)$.

⑤ א. רכיבי הקשירות הם $\{A\mid \det A>0\}$, $\{A\mid \det A<0\}$.

אלה קב' פתוחות, כ- pre-image של הפונקציה הרציפה $\det:\mathbb{R}^{n^2}\to\mathbb{R}$ מהקב' הפתוחות $(0,\infty)$, $(-\infty,0)$ בהתאמה. לכן הן פתוחות-סגורות ולכן $GL(n,\mathbb{R})$ לא קשירה. כדי להראות שאלה הרכיבים דרושה אלגברה...

ב. זו קב' קשירה, אפילו מסילתית: אם $A^t=A$, $B^t=B$ אז $(\alpha A+(1-\alpha)B)^t=\alpha A+(1-\alpha)B$ ולכן יש מסילה מ- A ל- B ב- $Sym(n)$.

$0\le\alpha\le1$