<u>פתרון תרגיל מס' 4 בטופולוגיה</u>

① תהי $f:\mathbb{R}_{cf}\to\mathbb{R}$.

אם f קבועה, אז $f(\mathbb{R}_{cf})=\{c\}$ לאיזשהו $c\in\mathbb{R}$. תהי $U\subseteq\mathbb{R}$ פתוחה (בטופ' רגילה). אם $c\in U$, $f^{-1}(U)=\mathbb{R}_{cf}$ פתוחה, ואם $c\notin U$ אז $f^{-1}(U)=\emptyset$ גם פתוחה. לכן f רציפה.

בכיוון השני, נניח ש-f רציפה. נניח בשלילה שהיא מקבלת יותר מערך אחד, ויהיו $a,b\in f(\mathbb{R}_{cf})$ $(a\neq b)$. אז הקבוצות $f^{-1}(-\infty,\frac{a+b}{2})$, $f^{-1}(\frac{a+b}{2},\infty)$ הן פתוחות וזרות ב-$\mathbb{R}_{cf}$; אז שאחת מוכלת במשלים של השניה - כלומר סופית, וזו סתירה.

② $f:\mathbb{R}_{\to}\to\mathbb{R}_{\to}$ רציפה $\iff$ f מונוטונית עולה ורציפה משמאל (במובן הרגיל)

($\Leftarrow$) אם $f\equiv 0$ היא מקיימת את שני האגפים, לכן נתעלם ממקרה זה.
יהי $x\in\mathbb{R}_{\to}$. אם $f(x)=0$, אז לכל $y>x$, $f(y)\geq 0$.

אם $f(x)>0$, אז לכל $\varepsilon>0$ קיים $r>0$ כך ש- $(r,\infty)=f^{-1}(f(x)-\varepsilon,\infty)$ (כי זו קבוצה פתוחה). מובן ש-x בקב' זו, לכן $r<x$. כלומר, לכל $y<x$ מתקיים $f(y)\in(f(x)-\varepsilon,\infty)$. כיון שזה נכון לכל ε, נובע $f(x)\leq f(y)$. קבלנו מונוטוניות. אם באיזשהי נק' x_0 יש רציפות מימין ולא משמאל, נקבל ש- $f^{-1}(\underset{\lim_{x\to x_0^-}f(x)}{\cancel{f(x_0)}},\infty)=[x_0,\infty)$ אינה פתוחה.

($\Rightarrow$) כיון ש-f מונוטונית, לכל $r\geq 0$, $f^{-1}(r,\infty)$ היא קרן אינסופית (קרן) מימין. כיון ש-f רציפה משמאל, זו קרן פתוחה.

③ נוכיח ש- $f(\partial A)\subseteq\partial f(A)$ תחילה.

יהי $x\in\partial A$. תהי $f(x)\in V\in\Omega_Y$ (סביבה של $f(x)$). אז -

$$f^{-1}(V\cap f(A))=f^{-1}(V)\cap f^{-1}(f(A))\supseteq \underbrace{f^{-1}(V)}_{\text{פתוחה, מכילה את } x}\cap A\underset{x\in\partial A}{\neq}\emptyset$$

(למעשה שוויון)

לכן $V\cap f(A)\neq\emptyset$. בדומה:

$$f^{-1}(V\cap f(A)^c)\underset{f\text{ הומאו'}}{=}f^{-1}(V)\cap A^c\neq\emptyset\Rightarrow V\cap f(A)^c\neq\emptyset$$

לכן, מהגדרה, $f(x)\in\partial f(A)$. כעת, גם f^{-1} הומאו', לכן נוכל להפעיל f^{-1} על ההכלה הזו ולקבל:

$$\underbrace{f^{-1}(f(\partial A))}_{=\,\partial A} \subseteq f^{-1}(\underbrace{\partial f(A)}_{B}) \subseteq \partial f^{-1}(B) = \underbrace{\partial f^{-1}(f(A))}_{=\,\partial A}$$

מה שהוכחנו רק על B, f^{-1}

יש שוויון בכל הדרך, כלומר: $f^{-1}(f(\partial A)) = f^{-1}(\partial f(A)) \iff f(\partial A) = \partial f(A)$.

(4) נניח בשלילה ש- $g:\mathbb{Z}\to\mathbb{Q}$ הומאומורפיזם.
$\{0\}\subseteq\mathbb{Z}$ קב' פתוחה ($\{0\}=(-\frac{1}{2},\frac{1}{2})\cap\mathbb{Z}$). כיוון ש-$g^{-1}$ רציפה, $g(\{0\})$ צריכה להיות פתוחה. אבל זו נקודה יחידה ב-$\mathbb{Q}$, ויחידון אינו קב' פתוחה ב-$\mathbb{Q}$ (כי $\mathbb{Q}$ צפופה, אז לכל קטע עוצמת $(a,b)\cap\mathbb{Q}$ היא $\aleph_0$ ולא 1).

(5) א. יש לבחור הומאומורפיזם חד מימדי $f:\mathbb{R}\to(0,\infty)$ (יש כמה דוגמאות, ראה שיעור)
אז $F:\mathbb{R}^2\to\{x>0,y>0\}$ הוא הומאומורפיזם,
$$(x,y)\mapsto(f(x),f(y))$$
הרציפות נובעת מרציפות בכל קורדינטה, כך גם ההופכית
$F^{-1}:\{x>0,y>0\}\to\mathbb{R}^2$ רציפה. חח"ע ועל ברורה.
$$(x,y)\mapsto(f^{-1}(x),f^{-1}(y))$$

$$\boxed{\text{לדוגמה: } F(x,y)=(e^x,e^y)}$$

ב. יש לבחור הומאומורפיזם חד מימדי $g:(0,\infty)\to(0,1)$ ולהגדיר:
$G:\mathbb{R}^2\to B_1(0)$ כאשר (r,θ) קורדינטות קוטביות.
$$(r,\theta)\mapsto(g(r),\theta)$$
$$(0,0)\mapsto(0,0)$$ ← נציין בנפרד.

בכל נקודה $\neq(0,0)$ יש רציפות של G וגם G^{-1}, כי יש רציפות לפי קורדינטות קוטביות וזה שקול לרציפות רגילה (מחדו"א). בנק' $(0,0)$ צריך לדאוג ש- $\lim_{r\to0} g(r)=0$, ואז:

$$\lim_{\substack{r\to0\\ \text{לכל } \theta}} G(r,\theta)=\lim_{r\to0}(g(r),\theta)=\underbrace{(0,\theta)}_{\text{בקוטביות}}=\underbrace{(0,0)}_{\text{קרטזיות לכל } \theta}.$$

$$\boxed{\text{לדוגמה: } G(x,y)=\left(\frac{x}{1+\sqrt{x^2+y^2}},\frac{y}{1+\sqrt{x^2+y^2}}\right)}$$