פתרון תרגיל 2 בטופולוגיה

כיון שהסברתם יפה בתרגיל, אקצר חלקים טכניים.

(1) $C\neq\emptyset$, למשל משום ש- $0\in I_k$ לכל k טבעי ולכן $0\in\bigcap I_k=C$.

C סגורה: לכל k, $I_k^c=I_{k-1}^c\cup\left(\bigcup_{n=1}\left(\frac{3n+1}{3^k},\frac{3n+2}{3^k}\right)\right)$

לכן אם I_{k-1} סגורה זה גורר ש- I_k סגורה. $I_0=[0,1]$ סגורה, לכן באינדוקציה I_k סגורה לכל k. $\Leftarrow$ $C=\bigcap_{k=1}^{\infty}I_k$ גם סגורה.

(2) חיוביות, סימטריה - ברורות מתכונות ערך מוחלט.

אי-שוויון משולש: צ"ל $\left(\sum_{i=1}^{2}|x_i-y_i|^p\right)^{1/p}+\left(\sum_{i=1}^{2}|y_i-z_i|^p\right)^{1/p}\geq\left(\sum_{i=1}^{2}|x_i-z_i|^p\right)^{1/p}$

נסמן $a_i=x_i-y_i$, $b_i=y_i-z_i$. אז צ"ל:

$$\underbrace{\left(\sum|a_i|^p\right)^{1/p}}_{\|a\|_{L^p}=\rho_p(a,0)\ \leftarrow\ \text{סימון}}+\left(\sum|b_i|^p\right)^{1/p}\geq\left(\sum_{i=1}^{2}|a_i+b_i|^p\right)^{1/p}$$

זהו א"ש מינקובסקי.
לצורך הקורס אין צורך לדעת את הוכחתו, אך נביא כאן 2 דרכים:

דרך א - אלגברית.

נעזר בא"ש הולדר: אם $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, אז $\sum_{k=1}^{n}|a_kb_k|\leq\left(\sum_{k=1}^{n}|a_k|^p\right)^{1/p}\left(\sum_{k=1}^{n}|b_k|^q\right)^{1/q}$.

נפתח:

$$\underbrace{\sum_{k=1}^{n}|a_k+b_k|^p}_{=\|a+b\|_{L^p}^p}\leq\sum\left(|a_k|+|b_k|\right)|a_k+b_k|^{p-1}=$$

$$=\sum|a_k||a_k+b_k|^{p-1}+\sum|b_k||a_k+b_k|^{p-1}$$

$$\leq\left[\left(\sum|a_k|^p\right)^{1/p}+\left(\sum|b_k|^p\right)^{1/p}\right]\cdot\underbrace{\left(\sum|a_k+b_k|^{(p-1)\frac{p}{p-1}}\right)^{1-\frac{1}{p}}}_{=\|a+b\|_{L^p}^{p-1}}$$

א"ש משולש על אחד מהם

Hölder

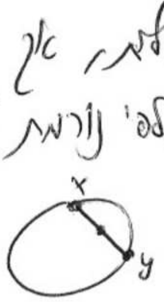
נחלק ב- $\left(\sum|a_k+b_k|^p\right)^{\frac{p-1}{p}}=\|a+b\|_{L^p}^{p-1}$, ונקבל את הדרוש:

$$\|a+b\|_{L^p}=\left(\sum|a_k+b_k|^p\right)^{1/p}\leq\left(\sum|a_k|^p\right)^{1/p}+\left(\sum|b_k|^p\right)^{1/p}.$$

דרך ב - גאומטרית.

נעזר בכך שכדור היחידה במטריקה L^p קמור (עובדה לא טריוויאלית, אך נניח זאת לפי הציור שלו...). זה אומר שאם $\|x\|=\|y\|=1$ (לפי נורמת L^p)

אז $\underbrace{\|\alpha x+(1-\alpha)y\|}_{\text{נק' בתוך הכדור}}\leq\overset{}{1}$, כאשר $1=\alpha\|x\|+(1-\alpha)\|y\|$



כעת, לכל $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ ו- $x,y\in\mathbb{R}^n$ המקיימים $\|x\|_p=\|y\|_p=1$ מתקיים:

$$\|\alpha x+\beta y\|_p \overset{=}{} |\alpha+\beta|\cdot\left\|\frac{\alpha}{\alpha+\beta}x+\frac{\beta}{\alpha+\beta}y\right\|_p \le |\alpha+\beta|\cdot 1$$

שימוש לחוקיות ש $\|cx\|=|c|\|x\|$

מקדמים שסכומם 1

וכעת, אם $x,y\in\mathbb{R}^n$ כלשהם, נקבל:

$$\|x+y\|_p=\left\|\underset{\alpha}{\|x\|}\underbrace{\frac{x}{\|x\|}}_{\text{נורמה}=1}+\underset{\beta}{\|y\|}\cdot\underbrace{\frac{y}{\|y\|}}_{\text{נורמה}=1}\right\|_p \le \left|\|x\|_p+\|y\|_p\right|$$

וזהו בדיוק אי"ש מינקובסקי.

③ א. בדיקה ישירה של תכונות מטריקה בהסתמך על (i)-(iii))

ב. נשתמש בסעיף א' עבור הפונקציות $f_1, f_2, f_3 : [0,\infty) \to [0,\infty)$

הבאות: $f_1(t) = \frac{t}{1+t}$, $f_2(t) = \min\{1,t\}$, $f_3(t) = \sqrt{t}$.

כולן מונוטוניות לא יורדות, מתאפסות רק ב-0, ומקיימות א"ש

$f(s+t) \le f(s) + f(t)$.

נראה למשל את בדיקת א"ש ל- f_2

$$f_2(s+t) = \min\{1, s+t\} \le \min\{1,s\} + \min\{1,t\}$$

אפשר לבדוק לפי מקרים, או פשוט

$$\min\{1,s\} + \min\{1,t\} \ge \min\{1+1, 1+t, 1+s, s+t\} \ge \min\{1, s+t\}$$

⑥ $S(x,r) = \overline{B}(x,r) \cap \underbrace{(B(x,r))^c}_{\text{משלים של כדור פתוח}} \Leftarrow$ סגורה כחיתוך של קבוצות סגורות. ($\overline{B}(x,r)$: סגור, מהתרגול)

④ נתמקד במבחן שקילות טופולוגית. נראה שבכל כדור פתוח לפי ρ_1, $B_r^{\rho_1}(x_0)$, $y \in B^{\rho_1}$, קיים כדור B^{ρ_2} כך ש- $y \in B^{\rho_2} \subset B_r^{\rho_1}(x_0)$

ואכן, אם $y \in B_r^{\rho_1}(x_0)$ נסמן $d = \rho_1(y, x_0) < r$. נגדיר $\varepsilon = (r-d)A$

ונקבל

$$z \in B_\varepsilon^{\rho_2}(y) \longrightarrow \rho_1(z, x_0) \le \underbrace{\rho_1(z,y)}_{1} + \rho_1(y, x_0)$$

$$< \frac{1}{A}\rho_2(z,y) + d \le r - d + d < r$$

לכן $z \in B_r^{\rho_1}(x_0)$, כנדרש. בכיוון ההפוך בדומה.

__הערה:__ היו נסיונות להראות שכל כדור ρ_1 מכיל כדור ρ_2 אך רק במרכז. זה לא מספיק! (שמתי לב לכך לאחר החזרת התרגילים, אז הרווחתם נקודות...)

⑤ מהגדרה, אם U פתוחה ו- $x \in U$, אז קיים כדור פתוח $B(x_0, r)$ כך ש- $x \in B(x_0, r) \subseteq U$ (שימו לב! לא ברור ש- $x_0 = x$). נבחר $\varepsilon = r - d(x, x_0)$, ונקבל ש- $B(x,\varepsilon) \subseteq B(x_0, r)$ ולכן $B(x,\varepsilon)$ הכדור הדרוש. הוכחה בעזרת א"ש משולש כפי שעשינו רבות.

בכיוון השני, נקבל ש- $U = \bigcup_{x \in U} B_\varepsilon(x)$ ולכן U פתוחה.