טופולוגיה - פתרון תרגיל B

(1) מהנתון יש $F:\mathbb{R}^2\to Y$ רציפה כך ש- $F|_X=f$.

נתבונן בהרכבה $X \xrightarrow{i} \mathbb{R}^n \xrightarrow{F} Y$ כלומר $f=F\circ i$

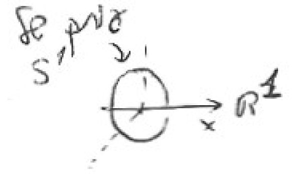
היא משרה הרכבה של העתקות על החבורות היסודיות, לפי הכלל $f_*=F_*\circ i_*$:

$$f_*: \pi_1(X)\xrightarrow{i_*}\pi_1(\mathbb{R}^n)=\{e\}\xrightarrow{F_*}\pi_1(Y)$$

מכאן ש- F_* שולחת יחידה ליחידה, $\mathrm{Im}\, F_*=\{e_Y\}$ ולכן $\mathrm{Im}\, f_*\subseteq \mathrm{Im}\, F_*=\{e\}$

$\Leftarrow$ לכל מסילה γ, $f_*\gamma=e_Y$.

(2) א. נגדיר: $r:\mathbb{R}^3\setminus\mathbb{R}^1\to S^1\subseteq\mathbb{R}^3$



$$(x,y,z)\longmapsto \left(0,\frac{y}{\sqrt{y^2+z^2}},\frac{z}{\sqrt{y^2+z^2}}\right)$$

נשים לב ש-r מוגדר היטב, כי נק' מהצורה $(x,0,0)$ הן מחוץ לתחום (במילים אחרות $\sqrt{y^2+z^2}>0$). התמונה הומיאומורפית למעגל שראינו* (זה מעגל יחידה במישור yz), ואכן $r(S^1)=S^1$ עבור עותק S^1 זה.

* כדי לחשב π_1, יש להראות ש-r היא חלק משקילות הומוטופית...

נגדיר $h: S^1\to\mathbb{R}^3\setminus\mathbb{R}^1$ להיות הכלה. (שוב, S^1 הוא העותק במישור yz).

אז $r\circ h=1_{S^1}$, $h\circ r=r\sim 1_{\mathbb{R}^3\setminus\mathbb{R}^1}$! ע"י ההומוטופיה:

$$H_t(x,y,z)=\left((1-t)x,\ (1-t)y+t\frac{y}{\sqrt{y^2+z^2}},\ (1-t)z+t\frac{z}{\sqrt{y^2+z^2}}\right)$$

$$\Leftarrow \pi_1(\mathbb{R}^3\setminus\mathbb{R}^1)=\pi_1(S^1)=\mathbb{Z}$$

ב. לו היתה רטרקציה $r:\mathbb{P}^2\to S^1$ אז היינו מקבלים העתקה על בין החבורות $r_*:\pi_1(\mathbb{P}^2)\to\pi_1(S^1)$

$$\mathbb{Z}_2 \twoheadrightarrow \mathbb{Z}$$

וזו כמובן סתירה, כי $|\mathbb{Z}_2|<|\mathbb{Z}|$.

③ נניח בשלילה כי $f(x) \neq (0,0)$ $\forall x \in \mathbb{D}^2$. נתבונן בהרכבה:

$$f|_{S^1}: S^1 \xrightarrow{i} \mathbb{D}^2 \xrightarrow{f} \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$$

היא משרה העתקות: $(f|_{S^1})_*: \underset{\mathbb{Z}}{\pi_1(S^1)} \xrightarrow{i_*} \underset{\{e\}}{\pi_1(\mathbb{D}^2)} \xrightarrow{f_*} \underset{\mathbb{Z}}{\pi_1(\mathbb{R}^2 \setminus 0)}$

לכן $Im[(f|_{S^1})_*] = \{e\}$ (כי מוכל ב- $\{e\} = Im(f_*)$)

ולכאן הסתירה לנתון ש- $f|_{S^1}$ לא קבועה.

④ א. בכיתה הוכחנו טענה דומה ל- $J \simeq I^2$. כיוון ש- $I^2 \simeq \mathbb{D}^2$, יש פשוט לחזור על אותם טיעונים (הטענה נובעת).

ב. $X = \mathbb{D}^2$, $J = S^1$ ⟸ אז J אינו הטריק של X.

$X = \mathbb{D}^2 \setminus \{0\}$ $J = S^1$ ⟸ J כן הטריק של X.

או $X = S^1$