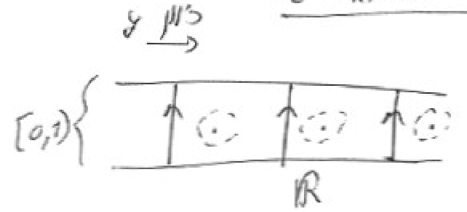
פתרונות לתרגיל בית מס' 12 בטופולוגיה



① נגדיר את ההעתקה:

$$p: [0,1]\times\mathbb{R} \longrightarrow [0,1]\times(\mathbb{R}/\mathbb{Z}) = [0,1]\times S^1$$
$$(x,y) \longmapsto (x, y \bmod 1)$$

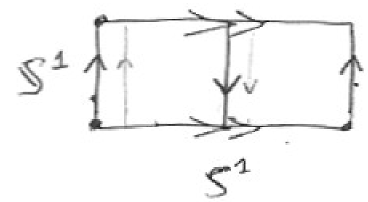
כלומר הטלה המתאימה ליחס השקילות $y_1 \sim y_2 \iff y_1 - y_2 \in \mathbb{Z}$ $(y_1,y_2\in\mathbb{R})$ בקואורדינטה השניה. נראה שזה כיסוי:

יהי $(x_0,y_0) \in I\times S^1$. אז $\pi^{-1}((x_0,y_0)) = \{(x_0,y_0+n) \mid n\in\mathbb{Z}\}$

אם נבחר $\varepsilon<\frac{1}{2}$, וניקח כדור ברדיוס ε סביב כל נקודה ב-$\mathbb{Z}$, נקבל שהכדורים זרים והטלתם על $I\times S^1$ זהה:

$$\pi\left(B_\varepsilon(x_0,y_0+n)\right) = U \simeq B_\varepsilon(x_0,y_0)$$

על כל כדור כזה, p חח"ע ועל U, רציפה וגם ההופכית רציפה, לכן p העתקת כיסוי.



עבור $K \longrightarrow S^1\times S^1$, נציג את המרחב $S^1\times S^1$ כך:

$$S^1\times S^1 = \underbrace{[0,2]}_{0\sim 2}\times\underbrace{[0,1]}_{0\sim 1}$$

כעת נגדיר $f: S^1\times S^1 \longrightarrow [0,2]\times[0,1] \simeq K$ — ההטלה שמזהה בדיוק לפי יחס זה.

$$\left\{\begin{array}{ll}(x,y)\sim(x+1,1-y), & \forall x\in[0,1]\\ (x,0)\sim(x,1) & \forall x\end{array}\right\}$$

אז לכל נק' ב-K יש שני מקורות (שים לב! גם לנקודות ב"שפה" של הציור שלי, כי רק בעצם מזוהות: $(2,x)$ ו-$(0,x)$ עד בצד שמאל, לכן f!)

לנקודה $(x,y)\in I\times I$ המקורות הם $(x,y),(x+1,1-y)\in\underbrace{(S^1)^2}_{\text{בייצוג שלנו}}$, ולכן אם ניקח כדור ברדיוס $\varepsilon<\frac{1}{2}$ סביב כל אחת מהן, נקבל הטלות שונות לכדורים אלה שיהיו הומאו' מקומי. (אפשר גם לחשוב על פס אינסופי.)

② ההטלה אינה העתקת כיסוי: עבור $x\in\mathbb{R}$ כלשהי, $p^{-1}(x)=\{x\}\times\mathbb{R}$. לכל סביבה בסיסית פתוחה של x, נניח (a,b), מתקיים בדומה $p^{-1}(a,b)=(a,b)\times\mathbb{R}=V$ - זאת קב' פתוחה וקשירה ב-$\mathbb{R}^2$, לכן לא ניתן להפרידה לאיחוד זר של קב' פתוחות; היא עצמה אינה הומאומורפית ל-$U=(a,b)$. בכך סתרנו את הדרישה של העתקת כיסוי.

אין יחידות הרמת מסילה: המסילה $\{t: 0\le t\le 1\}$ מהנקודה $(0,0)\in\mathbb{R}^2$ ניתן להרים ע"י $\{(t,0): 0\le t\le 1\}$ או ע"י $\{(t,t): 0\le t\le 1\}$.

למעשה, כל פונקציה רציפה, $f(0)=0$, $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ תגדיר מסילה
$\{(t,f(t)) \mid 0\le t\le 1\}$ שהטלתה היא $\{t: 0\le t\le 1\}$.

③ א. $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ שקול הומוטופית ל-S^1 ע"י העתקות:

$$f: S^1 \to \mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\} \qquad (x,y)\mapsto (x,y)$$

$$g: \mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\} \to S^1 \qquad (x,y)\mapsto \frac{(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

(למעשה, נסוג דפורמציה - חשבו מדוע)

קל לבדוק ש- $f\circ g$, $g\circ f$ שקולות הומוטופית לזהות המתאימה.

לכן: $\pi_1(\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}) = \pi_1(S^1) = \mathbb{Z}$.

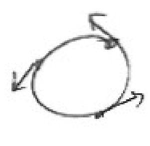
ב + ג. S^2 וגם I^2 פשוטי קשר, לכן $\pi_1(\cdot)=\{e\}$ טריוואלי.

ד. כמו ב-א', ניתן להראות ש- $I^2\setminus\{(\frac{1}{2},\frac{1}{2})\}$ שקול הומוטופית ל- S^1 ולכן החבורה יסודית שלו היא $\mathbb{Z}$

④ בשלילה, אם $f\sim g$ הומוטופיות עם נק' שמורה, אז $f_* = g_*$ על כל לולאה המתחילה באותה נקודה.
אבל עבור הלולאה $\gamma(t)=e^{it}$, $0\le t\le 2\pi$ נקבל ש-
$$f_*[\gamma(t)] = [\gamma(t)]$$
$$g_*[\gamma(t)] = [\gamma^3] \leftarrow \text{שרשור של המסילה } \gamma \text{ 3 פעמים.}$$
$$= [\{e^{it} \mid 0\le t\le 6\pi\}]$$
אבל אנו יודעים שהמסילות γ, γ^3 לא הומוטופיות (לא שייכות לאותה מחלקה ב- $\pi_1(S^1)$), מכיוון שההרמות שלהן למרחב הכיסוי $\mathbb{R}$ נותן נקודות סיום שונות.

⑤ משפט נק' שבת לא נכון ל- S^1, כי הסיבוב $z\mapsto -z$ זו העתקה רציפה $S^1\to S^1$ בלי נק' שבת.

משפט הכדור השעיר לא נכון, כי $(x,y)\overset{f}{\mapsto}(y,-x)$ זו העתקה $S^1 \to S^1$ כך ש- $f(x,y)\perp(x,y)$ $\forall(x,y)$.



(זהו בעצם סיבוב ב- $90°$).

(6) ראינו בתרגיל קודם (תרגיל 10 שאלה 4), כי כל הרטרקטים של S^1 הם S^1 וקשתות סגורות (הומאומורפיות ל- $[0,1]$).

אם A הוא דפורמ׳, הוא בפרט רטרקט אך גם שקולה הומוטופית ל- S^1. לכן קשת סגורה אינה דפורמ׳: לו היתה שקולה הומוטופית ל- S^1, היינו מקבלים $\{e\} = \pi_1([0,1]) \underset{\downarrow}{=} \pi_1(A) = \pi_1(S^1) = \mathbb{Z}$

$\underset{\text{קשת סגורה}}{A \simeq [0,1]}$

וזו סתירה.

נותרנו עם S^1 בלבד, והוא אכן דפורמ׳ ע״י הזהות.