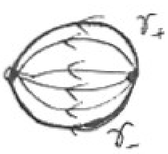
פתרון תרגיל 11 בטופולוגיה

① שימו לב שבהומוטופיה בין מסילות יש לשמור על הקצוות לכל אורך ההומוטופיה!

($\Leftarrow$) אם γ הומוטופית לאפס, אז יש הרחבה של $\gamma: S^1 \to X$ לפונקציה רציפה $\Gamma: D \to X$ (כך ש- $\Gamma|_{\partial D} = \gamma$). [משפט מהשיעור]

כעת נגדיר $H: I\times I \to X$ ע"י: $H(s,t) = \Gamma\left(e^{-\pi i s} + t\left(e^{\pi i s} - e^{-\pi i s}\right)\right)$

H רציפה כהרכבה של כאלה לפי כל קורדינטה, לכן H הומוטופיה.



$H(0,t) = \Gamma((1,0)) = \gamma_-(0) = \gamma_+(0)$ שמירת קצוות:

$H(1,t) = \Gamma(-1,0) = \gamma_-(1) = \gamma_+(1)$

$H(s,0) = \Gamma(e^{-\pi i s}) = \gamma_-(s)$ והיא מעבירה בין המסילות

$H(s,1) = \Gamma(e^{\pi i s}) = \gamma_+(s)$:

($\Rightarrow$) נניח כי $\gamma_- \sim \gamma_+$, כאשר נשמרות נקודות הקצה (אזי, $\gamma_+(0)=\overset{a}{\gamma_-(0)}$, $\gamma_+(1)=\underset{b}{\gamma_-(1)}$:)

אז $\gamma_+^{-1} \sim \gamma_-^{-1}$ בשמירה על אותן נק' קצה a,b.

כעת:

$$\underbrace{\gamma = \gamma_+ \cdot \gamma_-^{-1}}_{\text{מהגדרת שרשור מסילות והגדרת } \gamma_+,\gamma_-} \underbrace{\sim}_{\text{הומוטופיה ששומרת על } b,a \text{ ובפרט על } \gamma(0)=a} \gamma_+ \cdot \gamma_+^{-1} = \underbrace{e}_{\text{לולאה קבועה ב- } a=\gamma(0)}$$

שימו לב שההומוטופיה חוקית כי a נשמרת לאורכה, והיא נקודת הבסיס!

הצגנו לכן ש- $\gamma \sim e$ כנדרש.

② א. X אינו קשיר, אלא אם $|X|=1$ ואז הוא פשוט-קשיר באופן טריוויאלי.

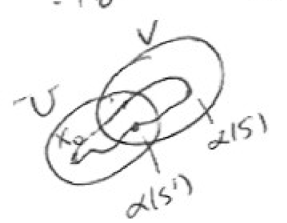
ב. X עם טופ' טריוויאלית הוא פשוט קשיר, כי כל פונקציה $f: I\times X\to X$ רציפה, ובפרט יש הומוטופיה בין כל שתי מסילות עם נק' קצה זהות.

ג. תחום כוכבי הוא פשוט קשיר, כיוון שהוא כוויץ.
ניתן להראות גם ישירות שכל מסילה הומוטופית למסילה הקבועה ב- x_0: תהי $\gamma: I\to X$ מסילה סגורה, $\gamma(0)=\gamma(1)=x_0$, אז היא הומוטופית ל- e_{x_0} ע"י:

$$H: I\times I\longrightarrow X$$
$$(s,t)\longmapsto \underbrace{t\gamma(s)+(1-t)\cdot x_0}_{\text{הנק' הנ"ל בתוך המרחב, מהגדרה.}}$$

③ א. לא! כפי שראינו, $V\cap U$ אינה בהכרח קשירה:

ב. כן. X קשיר מסילתית, לכן $U\cap V\neq\emptyset$. תהי $\alpha: I\to X$ מסילה סגורה עם נק' בסיס $x_0=u(0)=u(1)$. בלי הגבלה נניח $x_0\in U$.
אם $\alpha\subseteq U$ אז α הומוטופית לאפס.



אחרת, קיים $s\in I$ כך ש- $\alpha(s)\in V$. לכן קיים $s'\in I$ כך ש- $\alpha(s')\in U\cap V$ ($0<s'<s$; אחרת נקבל סתירה לקשירות מסילתית - חשבו מדוע)
נפעיל אותו שיקול על קטע המסילה $\alpha: [s,1)\to X$ ונקבל שיש $s''\in I$, $s<s''<1$ כך ש- $\alpha(s'')\in U\cap V$. V פשוטת-קשר, לכן $\alpha|_{[s',s'']}\subseteq V$ היא הומוטופית לכל מסילה אחרת בין $\alpha(s')$ ל- $\alpha(s'')$, ובפרט למסילה כזו העוברת ב- $U\cap V$ בלבד: (כי $U\cap V$ קשירה מסילתית!)
$\beta: I\to U\cap V$, $\beta(0)=\alpha(s')$, $\beta(1)=\alpha(s'')$

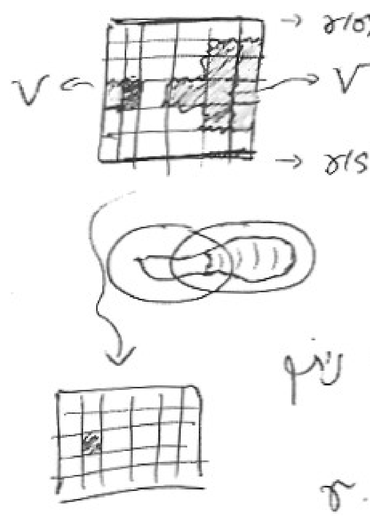
כעת $\alpha\sim\alpha_{[0,s']}\cdot\beta\cdot\alpha_{[s'',1]}$ אבל המסילה מימין מוכלת כולה ב- U, לכן הומוטופית לקבוע.

ג. נכון. תהי $\gamma: I \to U$ מסילה סגורה (ב-U), נראה שהיא הומוטופית לאפס ב-U. כיון ש- $U\cup V$ פשוט קשר, קיימת הומוטופיה של γ לקבוע בתוך $U\cup V$:

$$H: I\times I \to U\cup V$$
$$H_0(s)=\gamma(s), \quad H_1(s)=\gamma(0)$$

בעזרת הרמז (שהוכחתו לא קשה, על-כן אשמיט) ניתן לחלק את $I\times I$ לריבועים קטנים כך שתמונת כל ריבוע קטן היא ב-U או ב-V.

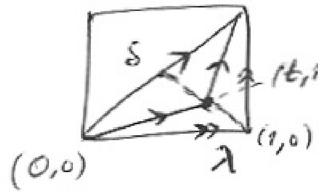
יהי K איחוד הריבועים הקטנים שתמונתם ב-V.



ל-K יש אולי כמה רכיבי קשירות (ראה בתמונה - 3 בערך). תהי L השפה של רכיב קשירות אחד כזה. אז $H(L)$ היא מסילה סגורה ב-$V\cap U$, ולכן היא הומוטופית לאפס. במילים אחרות, כל רכיב קשירות של K הוא בעצם הומוטופיה חופשית מין שתי מסילות ב- $V\cap U$, וכיון ש- $V\cap U$ פשוט-קשר ניתן להחליף הומוטופיה זו בהומוטופיה בתוך $V\cap U$.

כך נעשה לכל רכיב של K ונקבל הומוטופיה בין γ לקבועה בתוך U.

(4) נגדיר הומוטופיה: $H: I\times[\frac{1}{2},1] \to I\times I$



$$H(s,t)=\begin{cases} 2s\cdot(t,1-t), & 0\le s\le \frac{1}{2} \\ (2s-1)(t,1-t)+(2-2s)\cdot(1,1) & \frac{1}{2}\le s\le 1 \end{cases}$$

זו בקלות פונקציה רציפה, ואכן $\forall s \quad H(s,\frac{1}{2})=(s,s)$
$H(s,1)=\lambda(s)$

שים לב שהפרמטר של הזמן כאן הוא ב-$[\frac{1}{2},1]$, אך מובן שזה לא משנה, כי $I\simeq[\frac{1}{2},1]$.

בציור ישנו רעיון ההומוטופיה: שרשור של שני קווים ישרים.