טופולוגיה - תרגיל מס 5

① הוכח בעזרת "אינדוקציה על קשירות" (משפט שנלמד בכיתה) כי אם X מרחב קשיר, ולכל נקודה $x\in X$ קיימת סביבה קשירה מסילתית המכילה את x, אז X קשיר מסילתית.

② היזכר ב"טופולוגית הקרן" $\mathbb{R}_{\rightarrow}$ מתרגיל 4:
אפיין את כל הקבוצות הקשירות $A\subseteq\mathbb{R}_{\rightarrow}$ בטופ' זו.

③ הוכח או הפרך:
א. אם $A\cup B$ ו- $A\cap B$ קשירות, אז גם A ו- B קשירות.
*ב. אם $\{J_k\}_{k=1}^{\infty}$ קב' סגורות מוכלות ב-$\mathbb{R}^2$ ($J_1\supset J_2\supset J_3\supset\cdots$)
J_k קשיר לכל k, אז $\bigcap_{k=1}^{\infty}J_k$ קשיר.

④ משפט ערך הביניים:
הוכח: אם X קשירה, $f:X\to\mathbb{R}$ רציפה וקיימים $a,b\in X$ כך ש- $f(a)<0<f(b)$, אז קיים $c\in X$ כך ש- $f(c)=0$.

⑤ קבע האם הקב' הבאות ב-$\mathbb{R}^{n^2}$, הרשומות כמטריצות (עם הטופ' הזו של $\mathbb{R}^{n^2}$ כוקטור ארוך), הן קשירות:

א. $GL(n,\mathbb{R})=\{A\mid \det A\neq 0\}$

ב. $Sym(n,\mathbb{R})=\{A\mid A^t=A\}$