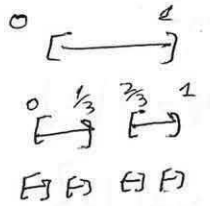
טופולוגיה - דף תרגילים 2

① נגדיר סדרה של קבוצות באופן איטרטיבי:



$I_0=[0,1]$

$I_1=I_0\setminus(\frac{1}{3},\frac{2}{3})$

$I_2=I_1\setminus\{(\frac{1}{9},\frac{2}{9})\cup(\frac{7}{9},\frac{8}{9})\}$

$\vdots$

$I_k=I_{k-1}\setminus\{(\frac{3n+1}{3^k},\frac{3n+2}{3^k})\}_{n\in\mathbb{N}}$

במילים: בכל פעם מחלקים את הקטעים המרכיבים את I_{k-1} ל-3 חלקים, ומסירים את החלק האמצעי (כקטע פתוח).

נסמן: $C=\bigcap_{j=1}^{\infty} I_j$. הוכח כי $C\neq\emptyset$ וכי C קבוצה סגורה בטופ' הרגילה על $\mathbb{R}$.

② הוכח כי לכל $1<p<\infty$, $\rho_p((x_1,x_2),(y_1,y_2))=\left(\sum_{i=1}^{2}|x_i-y_i|^p\right)^{1/p}$ היא אכן מטריקה ב-$\mathbb{R}^2$.

③ א. נתונה פונקציה $f:[0,\infty)\to[0,\infty)$ המקיימת:

(i) f מונוטונית לא יורדת.

(ii) $f(t)=0 \iff t=0$.

(iii) לכל $s,t\geq 0$: $f(s+t)\leq f(s)+f(t)$.

הוכח כי אם ρ מטריקה על X, גם $\mu(x,y)=f(\rho(x,y))$ היא מטריקה על X.

ב. הוכח כי אם ρ מטריקה על X, אז גם $\frac{\rho(x,y)}{1+\rho(x,y)}$, $\min\{1,\rho\}$ וגם $\sqrt{\rho(x,y)}$ כולן מטריקות על X.

④ נתונות ρ_1,ρ_2 - שתי מטריקות על X. הראה ש-ρ_1,ρ_2 הן מטריקות שקולות אם"ם קיימים קבועים $A,B>0$ כך ש-

$A\rho_1(x,y)\leq\rho_2(x,y)\leq B\cdot\rho_1(x,y)$.

⑤ יהי (X,ρ) מרחב מטרי. הוכח כי $U\subseteq X$ קבוצה פתוחה $\iff$ לכל נקודה $x\in U$ קיים רדיוס $\varepsilon>0$ כך ש-$B_\varepsilon(x)\subseteq U$.

⑥ הוכח שהספירה $S(x,r)=\{y\mid\rho(x,y)=r\}$ היא קבוצה סגורה במרחב המטרי (X,ρ).