סמסטר א', מועד דוגמה, תשע"ו
תאריך הבחינה: 2016
מספר קורס: 0366-2106

בחינה בפונקציות ממשיות

המורה: פרופ' בוריס צירלסון

משך הבחינה: 3 שעות.
מותר להשתמש בדף סיכום אישי.
בחרו 3 מתוך 4 השאלות הבאות.

בהצלחה!

שאלה 1

=30

תהי $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ פונקציה כזאת שלכל x קיימים גבולות (סופיים) $f(x-)=\lim_{t\uparrow x} f(t)$, $f(x+)=\lim_{t\downarrow x} f(t)$, ומתקיים

$$f(x)=\frac{f(x-)+f(x+)}{2}\,.$$

הוכיחו כי f היא פונקציה מדידה בורל.

רמז: פונקציות מדרגות.

שאלה 2

=35

נגדיר התפלגות אחידה ν בספרה $S=\{x\in\mathbb{R}^n:|x|=1\}$ ע"י

$$\nu(A)=\frac{1}{V_n}m_n\Big(\Big\{x\in\mathbb{R}^n:0<|x|<1,\ \frac{x}{|x|}\in A\Big\}\Big)$$

לכל קבוצת בורל $A\subset S$, כאשר $V_n=m_n\big(\{x\in\mathbb{R}^n:|x|<1\}\big)$, ו- m_n מידת לבג ב- $\mathbb{R}^n$. נתבונן בהעתקה

$$\varphi:\mathbb{R}^n\setminus\{0\}\to S\times(0,\infty)\,,\quad \varphi(x)=\Big(\frac{x}{|x|},|x|\Big)\,.$$

הוכיחו כי

$$\varphi_*(m_n)=\nu\times(f\cdot m_1)$$

כאשר $f(r)=nV_nr^{n-1}$.

שאלה 3

=40

תהי ν_r התפלגות אחידה במעגל $\{x \in \mathbb{R}^2 : |x| = r\}$, כלומר,
$\nu_r(A) = \frac{1}{2\pi} m\big(\{\theta \in (0, 2\pi) : (r\cos\theta, r\sin\theta) \in A\}\big)$ לכל קבוצת בורל $A \subset \mathbb{R}^2$.
תהי μ מידה סופית מקומית ב־$\mathbb{R}^2$ כך ש־

$$\forall r \in (0, \infty) \quad \nu_r * \mu = \mu .$$

הוכיחו כי

(א) קיימת פונקציה $u : \mathbb{R}^2 \to [0, \infty)$, גזירה אינסוף פעמים, המקיימת $\mu = u \cdot m_2$;

....

(ב) הפונקציה u היא הרמונית, כלומר, $\big(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\big) u(x, y) = 0 \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$.

רמז: קונבולוציה עם $(1 - |x|^2)_+^{n+1}$.

שאלה 4

=35

יהיו $X, Y : \Omega \to \mathbb{R}$ משתנים מקריים בלתי תלויים, X מתפלג אחיד ב־$[1, 4]$,
ו־ Y מתפלג אחיד ב־$[2, 5]$. נגדיר משתנה מקרי $\varphi = \max(X, Y)$ ומאורע
$A = \{X > Y\}$. מצאו את ההסתברות המותנית $\mathbb{P}\left(A \,\middle|\, \varphi\right)$.
