הסתברות למתמטיקאים - תרגיל בית מס' 9

הערה: P היא מטריצת ההסתברויות של שרשרת מרקוב. אם השרשרת אי־פריקה נכתוב ש P אי־פריקה וכד'.

1. נניח ש P אי־פריקה. נגדיר את המחזור $d = d(i)$ של המצב i כמחלק המשותף הגדול ביותר של הקבוצה

$$J_i = \{n \geq 0 \,:\, p_n(i,i) > 0\}$$

(א) הוכיחו ש J_i סגורה תחת פעולת חיבור.

(ב) הוכיחו כי $J_i = d(i)\,\mathbb{N} \backslash F$ כאשר F קבוצה סופית. ($d\mathbb{N} = \{0, d, 2d, \ldots\}$).
רמז: הראו שאם $\gcd(m,n) = 1$ אזי $\{xm + ny \,:\, x, y \in \mathbb{N}\} = \mathbb{N} \backslash G$, כאשר G קבוצה סופית.

(ג) הוכיחו שלכל המצבים של השרשרת יש את אותו המחזור, ולכן אפשר להגדיר מחזור של P.
הערה: אם P פריקה אז יכולות להיות קבוצות מצבים שונות עם מחזור שונה.

2. נניח ש X_n שרשרת מרקוב אי־פריקה ולא מחזורית, עם מרחב מצבים סופי S, מצב התחלתי i ומטריצת הסתברויות P. נגדיר

$$T = \min\{n > 0 \,:\, X_n = i\}$$

להיות זמן החזרה הראשון למצב i. לכל מצב j נסמן ב $r(j)$ את תוחלת מספר הביקורים של X_n במצב j לפני החזרה הראשונה ל i,

$$r(j) = \mathbb{E}\left\{\sum_{n=0}^{T-1} \mathbb{1}_{\{X_n = j\}}\right\}.$$

שימו לב כי $r(i) = 1$.

(א) נסמן ב $\overline{r}$ את הוקטור $\left(r_1, \ldots, r_{|S|}\right)$. הוכיחו כי $\overline{r}P = \overline{r}$.

(ב) הראו כי

$$\mathbb{E}\{T\} = \sum_{j \in S} r(j).$$

(ג) הסיקו כי $\mathbb{E}\{T\} = \frac{1}{\pi(i)}$, כאשר $\overline{\pi}$ היא ההתפלגות הסטציונארית.

3. נניח ש G הוא גרף שלם עם N קודקודים (ללא לולאות עצמיות). נסמן ב X_n הילוך מקרי פשוט על G. נסמן ב T את הזמן הראשון בו X_n מבקר בקודקוד מס' 1 (עבור $n > 0$).

(א) חשבו את ההתפלגות של T בהנחה ש $X_0 = 1$. ודאו את נכונות הנוסחה משאלה 2 סעיף ג'.

(ב) מהו $\mathbb{E}\{T \mid X_0 = 2\}$?

(ג) מצאו את התוחלת של מספר הצעדים הדרושים לביקור בכל הקודקודים של הגרף לפחות פעם אחת.