הסתברות למתמטיקאים - תרגיל בית מס' 7

הערה: נסמן ב S_n הילוך מקרי פשוט (ב $\mathbb{Z}$). נגדיר $u_m = \mathbb{P}(S_m = 0)$.

1. הוכיחו כי

$$\mathbb{P}(S_1 \neq 0, S_2 \neq 0, \ldots, S_{2n} \neq 0) = u_{2n}.$$

2. (א) הוכיחו כי $\mathbb{P}(S_1 S_2 \ldots S_n \neq 0) = \frac{1}{n}\mathbb{E}\{|S_n|\}$.
רמז: היעזרו ב Ballot theorem כדי להראות כי מתקיים

$$\mathbb{P}(S_1 S_2 \ldots S_n \neq 0 \mid S_n = b) = \frac{|b|}{n}\mathbb{P}(S_n = b).$$

(ב) לכל $b \in \mathbb{N}$ נגדיר $T_b = \min\{n \in \mathbb{N} \,:\, S_n = b\}$. הוכיחו כי מתקיים

$$\mathbb{P}(T_b = n) = \frac{|b|}{n}\mathbb{P}(S_n = b).$$

רמז: היעזרו בסעיף א' ובהיפוך זמן (כלומר הילוך מקרי מהסוף להתחלה).

(ג) נגדיר $L_n = \max\{j \leq n \,:\, S_j = 0\}$ (כלומר זמן חזרה אחרון לראשית). הוכיחו כי מתקיים

$$\mathbb{P}(L_{2n} = 2k) = u_{2k} \cdot u_{2n-2k}.$$

3. נסמן ב T את זמן החזרה הראשון ל 0, כלומר $T = \min\{n \geq 1 \,:\, S_n = 0\}$. הוכיחו כי $\mathbb{E}\{T\} = \infty$.

4. יהי $(X_n, Y_n) \in \mathbb{Z}^2$ הילוך מקרי דו-מימדי פשוט, כלומר עוברים לאחת מארבע הנקודות ב $\mathbb{Z}^2$ במרחק 1 מהנקודה הנוכחית בהסתברות $\frac{1}{4}$. נגדיר

$$M_n = \max(X_0, Y_0, X_1, Y_1, \ldots, X_n, Y_n).$$

מצאו פונקציה $g : \mathbb{Z}^2 \to \mathbb{Z}$ כך שמתקיימת נוסחה מהצורה הבאה עבור פונקציית ההתפלגות של M_n:

$$\mathbb{P}(M_n = m) = \mathbb{E}\{g(X_n - m, Y_n - m)\}$$

לכל $m = 0, 1, 2, \ldots$.
רמז: הכלילו את למה 4a2 מהרשימות, עבור f אנטיסימטרית ב x וב y.

5. $\star$ נסמן ב π_{2n} את הזמן בו הילוך מקרי S_n נמצא מעל ציר x, כלומר

$$\pi_{2n} = \#\{k \in \{1, \ldots, 2n-1\} \,:\, S_{k-1}, S_k \geq 0\}.$$

הוכיחו כי

$$\mathbb{P}(\pi_{2n} = 2k) = u_{2k} u_{2n-2k}.$$

רמז: הוכיחו באינדוקציה על n. התחילו מהמקרה $k = n$ והיעזרו בשאלה 1. רשמו נוסחת רקורסיה ל $\mathbb{P}(\pi_{2n} = 2k)$ בעזרת ההתפלגות של זמן החזרה הראשון ל 0.