

הסתברות למתמטיקאים - תרגיל בית מס' 5

הערה: כ"ב - כמעט בטוח (almost surely or a.s.) - SLLN. חוק חזק של המספרים הגדולים.

1. נתון מרחב הסתברות $((0, 1), \mathcal{B}, m)$ (מידת לבג) ונגדיר משתנים מקריים $\beta_1, \beta_2, \dots : (0, 1) \rightarrow \{0, 1\}$ באופן הבא:

$$\omega = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\beta_n(\omega)}{2^n}, \quad \liminf_{n \rightarrow \infty} \beta_n(\omega) = 0, \quad \omega \in (0, 1)$$

הוכיחו כי β_n משתנים ב"ת. בנוסף אם $\beta_n = \mathbb{1}_{A_n}$ אזי A_n מאורעות ב"ת בעלי הסתברות $\frac{1}{2}$ כל אחד.

2. הוכיחו כי לכל סדרה של מ"מ $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ קיימת סדרה של מספרים $c_n > 0$ כך ש $c_n X_n \rightarrow 0$ כ"ב.

3. נתונה סדרה U_1, U_2, \dots של מ"מ ב"ת המתפלגים יוניפורמית ב $(-1, 1)$.

(א) הוכיחו כי כ"ב הסדרה $(nU_n)_{n=1}^{\infty}$ צפופה בכל \mathbb{R} .

(ב) הוכיחו כי כ"ב הסדרה $(n^2 U_n)_{n=1}^{\infty}$ אינה צפופה ב \mathbb{R} ובנוסף $n^2 |U_n| \rightarrow \infty$.

4. (גרסה של בורל ל SLLN) תהי X_n סדרה של מ"מ ב"ת ש"ה, כך ש $\mathbb{E}\{X_1^4\} < \infty$ אזי כ"ב מתקיים $\frac{1}{n}(X_1 + \dots + X_n) \rightarrow \mathbb{E}\{X_1\}$.

(א) הוכיחו כי מספיק להתייחס למקרה בו $\mathbb{E}\{X_1\} = 0$.

(ב) אם $\mathbb{E}\{X_1\} = 0$ אזי $\mathbb{E}\{(X_1 + \dots + X_n)^4\} \sim 3n^2 (\mathbb{E}\{X_1^2\})^2$.

(ג) האם הוכחה דומה תעבוד אם נתון כי $\mathbb{E}\{X_1^2\} < \infty$?

5. הוכיחו כי לכמעט כל מספר $x \in (0, 1)$ מתקיים

$$\lim_{q \rightarrow \infty} \min_{p \in \mathbb{N}} q^{2.1} \left| x - \frac{p}{q} \right| = \infty$$

6. נתונה סדרה X_1, X_2, \dots של מ"מ ב"ת ש"ה כך ש $\mathbb{E}\{X_1^2\} < \infty$. נגדיר את ממוצע המדגם (Sample mean)

$$m_n = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n X_j$$

ואת השונות המדגם (Sample variance)

$$S_n^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{j=1}^n (X_j - m_n)^2$$

הוכיחו כי כ"ב $m_n \rightarrow \mathbb{E}\{X_1\}$ ו $S_n^2 \rightarrow \text{Var} X_1$.

7. נניח ש $\{X_n\}$ סדרה של מ"מ ב"ת מתפלגים $N(0, 1)$.

(א) מצאו את הגבול (אם הוא קיים) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \exp\left(\frac{a}{2} X_k^2\right)$ כאשר $a = 0.8$.

(ב) כמו סעיף א', עבור $a \in \mathbb{R}$ כלשהו.

רמז: היעזרו במונוטוניות לפי a .

(ג) האם יש התכנסות (כ"ב) לכל ערכי a בו זמנית?

רמז: היעזרו במונוטוניות לפי a , היעזרו בהוכחה של Glivenko-Cantelli.

(ד) האם ההתכנסות היא במ"ש ב a ? אם לא, באילו קטעים ההתכנסות היא במ"ש?