הסתברות למתמטיקאים - תרגיל בית מס' 11

1. הוכיחו את הלמה הבאה: נניח ש T זמן עצירה ביחס לפילטרציה $\{\mathcal{F}_n\}$, $N \in \mathbb{N}$ ו $\epsilon > 0$. אם נתון כי לכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים:

$$\mathbb{P}\left(T \leq n + N \mid \mathcal{F}_n\right) > \epsilon \quad \text{a.s.}$$

אזי $\mathbb{E}\{T\} < \infty$.
<u>רמז:</u> הוכיחו באינדוקציה כי $\mathbb{P}(T > kN) \leq (1-\epsilon)^k$ לכל $k \in \mathbb{N}$. היעזרו בכך שאם $\mathcal{F}_n \subset \mathcal{F}$ ו $A \in \mathcal{F}$ מאורע אז לכל $B \in \mathcal{F}_n$ מתקיים

$$\int_B \mathbb{P}\left(A \mid \mathcal{F}_n\right) d\mathbb{P} = \int_B \mathbb{1}_A \, d\mathbb{P} = \mathbb{P}(A \cap B).$$

2. נניח ש $X_1, X_2, \ldots$ סדרה של מ"מ ב"ת כך ש $\mathbb{E}\{X_k\} = 1$, $X_k \geq 0$ לכל k. נגדיר $M_n = X_1 X_2 \ldots X_n$, הוכיחו כי M_n מרטינגל.

3. יהיו $Y_1, Y_2, \ldots$ ב"ת ש"ה בעלי תוחלת μ ושונות σ^2. יהי T מ"מ ב"ת ב $Y_1, Y_2, \ldots$ עם ערכים ב- $\mathbb{N}$. נגדיר $X = Y_1 + \cdots + Y_T$. הוכיחו ש-

$$\mathrm{Var}(X) = \sigma^2 \mathbb{E}\{T\} + \mu^2 \mathrm{Var}(T).$$

4. זהות Wald: יהיו $X_1, X_2, \ldots$ מ"מ ב"ת ש"ה. יהי τ זמן עצירה ביחס ל- $\mathcal{F}_n = \sigma(X_1, .., X_n)$ כך ש- $\mathbb{E}\{\tau\} < \infty$. הראו ש-

$$\mathbb{E}\{S_\tau\} = \mathbb{E}\{\tau\} \mathbb{E}\{X_1\},$$

כאשר $S_\tau = X_1 + \ldots + X_\tau$.
<u>רמז:</u> הניחו תחילה ש- $X_k \geq 0$. למקרה הכללי היעזרו בפוביני.

5. נתונה סדרה של מ"מ $X_1, X_2, \ldots$ ב"ת ש"ה שמתפלגים אחיד בקטע $[0,1]$ ונגדיר $T = \inf\{n : S_n \geq 1\}$.
   (א) הוכיחו באינדוקציה ש- $\mathbb{P}(T > n) = \frac{1}{n!}$.
   (ב) הראו ש- $\mathbb{E}\{S_\tau\} = \frac{e}{2}$.

6. יהיו $X_1, X_2, \ldots$ מ"מ ב"ת ש"ה, כך ש $\mathbb{P}(X_1 = \pm 1) = \frac{1}{2}$. נגדיר $S_n = X_1 + \cdots + X_n$ (כלומר הילוך מקרי פשוט). עבור $a, b \in \mathbb{Z}$ כך ש $a < b$ נגדיר $N = \inf\{n : X_n \notin (a,b)\}$.
   (א) הראו שלכל $x \in (a,b)$ מתקיים

$$\mathbb{P}\left(x + S_{b-a} \notin (a,b)\right) \geq 2^{-(b-a)}.$$

   (ב) הראו ש-

$$\mathbb{P}\left(N > n(b-a)\right) \leq \left(1 - 2^{-(b-a)}\right)^n.$$

   (ג) חשבו את $\mathbb{P}(S_N = a), \mathbb{P}(S_N = b)$ כתלות ב- a, b.