הסתברות למתמטיקאים - תרגיל בית מס' 10

1. נתונה סדרה של מ"מ ב"ת $X_1, X_2, \ldots$ כך ש $\mathbb{E}\left\{X_i\right\} = 0$, $\mathrm{Var}\left(X_i\right) = \sigma_i^2 < \infty$ ו $s_n^2 = \sum_{k=1}^{n} \sigma_k^2$ אזי $S_n^2 - s_n^2$ הוא מרטינגל.

2. תהי $X_1, X_2, \ldots$ סדרת מ"מ ב"ת כך ש $\mathbb{P}\left(X_1 = -1\right) = \frac{2}{3}$, $\mathbb{P}\left(X_1 = 1\right) = \frac{1}{3}$. מצאו t כך ש $Y_n = t^{x_1 + \ldots + X_n}$ הוא מרטינגל. חשבו את גבולו.

3. יהיו σ, τ שני זמני עצירה ביחס לפילטרציה $\left\{\mathcal{F}_n\right\}$ כך ש $\sigma \le \tau$. נגדיר את התהליך

$$\mathbb{1}_{(\sigma, \tau]}\left(n, \omega\right) = \begin{cases} 1 & , \sigma\left(\omega\right) < n \le \tau\left(\omega\right) \\ 0 & , \text{otherwise} \end{cases}.$$

הוכיחו ש $\mathbb{1}_{(\sigma, \tau]}$ הינו תהליך ניתן לחיזוי (previsible). הסיקו שאם X הוא סופרמרטינגל אז

$$\mathbb{E}\left\{X_{\tau \wedge n}\right\} \le \mathbb{E}\left\{X_{\sigma \wedge n}\right\}.$$

4. האם קיים מרטינגל המתכנס כ"ב ל $+\infty$?
<u>רמז:</u> חשבו על הילוך מקרי שבכל צעד הוא בהסתברות גבוהה קרוב ל 1 ובהסתברות קטנה מספר שלילי גדול.

5. נניח שהזכיות (לכל יחידה של כסף שמהמרים עליה) בזמן n נתונות ע"י $\epsilon_n \ge 0$, כאשר $\left\{\epsilon_n\right\}$ היא סדרת מ"מ ב"ת הנתונים ע"י

$$\mathbb{P}\left(\epsilon_n = 1\right) = p, \quad \mathbb{P}\left(\epsilon_n = -1\right) = 1 - p = q,$$

כאשר $p \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$. נתון כי כמות הכסף שמהמרים עליה C_n בזמן n צריכה להיות בין 0 ל Z_{n-1}, כאשר Z_{n-1} היא כמות הכסף שנשארה לנו אחרי ההימור בשלב ה $n-1$. מטרת המשחק היא למקסם את התשואה $\mathbb{E}\left\{\log\left(\frac{Z_N}{Z_0}\right)\right\}$, כאשר N הוא מספר נתון המייצג את משך המשחק, ו Z_0 את כמות הכסף בתחילת המשחק. נסמן $\mathcal{F}_n = \sigma\left(\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n\right)$. הוכיחו כי אם C_n היא אסטרטגיה ניתנת לחיזוי (previsible) כלשהי אז $\log Z_n - n\alpha$ היא סופרמרטינגל, כאשר

$$\alpha = p \log p + q \log q + \log 2,$$

כלומר בפרט מתקיים $\mathbb{E}\left\{\log\left(\frac{Z_N}{Z_0}\right)\right\} \le N\alpha$. הראו שלאסטרטגיה מסוימת $\log Z_n - n\alpha$ הוא מרטינגל, מהי האסטרטגיה הטובה ביותר?

6. מצאו דוגמה של מרטינגל X_m, כך ש $\sup_n \left|X_n\right| < \infty$ אבל $\mathbb{P}\left(X_n = a \ \text{ i.o.}\right) = 1$ עבור $a \in \{-1, 0, 1\}$.
<u>הערה:</u> בכיתה ראינו שאם נתון $\left|X_{n+1} - X_n\right| \le M < \infty$ אזי למרטינגל קיים גבול סופי, או $\limsup X_n = -\liminf X_n = \infty$. כלומר לא מספיק לדרוש $\sup \left|X_{n+1} - X_n\right| < \infty$ כדי לקבל את התוצאה הנ"ל.
<u>רמז:</u> מצאו מרטינגל שמבצע "קפיצות גדולות" מספר סופי של פעמים כ"ב (בעזרת בורל-קנטלי).

7. $\star$ שנו את הדוגמה מהתרגיל הקודם כדי לבנות מרטינגל המקיים $\mathbb{P}\left(X_n = 0\right) \to 1 - 2p$, $\mathbb{P}\left(X_n = -1\right), \mathbb{P}\left(X_n = 1\right) \to p$ עבור $p \in (0, 1)$ מסוים. הדוגמה מראה כי מרטינגל יכול להתכנס בהתפלגות אבל לא כ"ב (או בהסתברות).
<u>רמז:</u> (עבור $p = \frac{2}{3}$) מצאו מרטינגל שהחל ממקום מסוים מתנהג כמו שרשרת מרקוב עם מטריצת הסתברויות

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$