סמסטר ב׳, מועד ב׳ , תשע״ג
תאריך הבחינ 30.08.2013
מספר קורס: 0366-3098

בחינה בהסתברות למתמטיקאים

המורה: פרופ׳ בוריס צירלסון

משך הבחינה: 3 שעות.
מותר להשתמש בדף סיכום אישי.
בחרו 3 מתוך 4 השאלות הבאות.

בהצלחה!

שאלה 1

=35

יהיו U_n מ״מ ב״ת ש״ה, בעלי התפלגות אחידה ב־ $(0,1)$. נגדיר $Z_n = \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i} U_n}$, $X_n = |Z_{n+1} - Z_n|$. הוכיחו כי כמעט בטוח מתקיים:

(א)

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{X_n^\alpha} \xrightarrow[n\to\infty]{} C_\alpha = \frac{1}{2^\alpha \pi}\int_0^\pi \frac{\mathrm{d}x}{\sin^\alpha x}$$

עבור $\alpha = \frac{1}{2}$.

(ב) אותו הדבר עבור כל $\alpha \in (0,1)$.

רמז: (א) האם X_n תלויים? (ב) קודם α רציונלי; אחר־כך מונוטוניות ב־ α.

שאלה 2

=35

(א) הוכיחו כי לכל מ״מ אינטגרבילי X מתקיים $\mathbb{E}\big(\sin\varepsilon X\big) = \varepsilon\mathbb{E}\big(X\big) + o(\varepsilon)$, כלומר,

$$\frac{\mathbb{E}\big(\sin\varepsilon X\big) - \varepsilon\mathbb{E}\big(X\big)}{\varepsilon} \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} 0\,.$$

(ב) הוכיחו כי (א) מתקיים במידה שווה על כל X כאלה ש־ $\mathbb{E}\big(X^2\big) \le 1$; כלומר,

$$\sup_{X:\mathbb{E}(X^2)\le 1}\left|\frac{\mathbb{E}\big(\sin\varepsilon X\big) - \varepsilon\mathbb{E}\big(X\big)}{\varepsilon}\right| \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} 0\,.$$

(ג) האם (א) מתקיים במידה שווה על כל X כאלה ש־ $\mathbb{E}\big(|X|\big) \le 1$? כלומר, האם

$$\sup_{X:\mathbb{E}(|X|)\le 1}\left|\frac{\mathbb{E}\big(\sin\varepsilon X\big) - \varepsilon\mathbb{E}\big(X\big)}{\varepsilon}\right| \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} 0\,?$$

הוכיחו את התשובה.

שאלה 3

=35

נניח כי מאורעות $A_n \subset \Omega$ מקיימים לכל n

$$\mathbb{P}\left(A_n \,\middle|\, A_{n-1} \right) = \frac{3}{4}\,; \quad \mathbb{P}\left(A_n \,\middle|\, \Omega \setminus A_{n-1} \right) = \frac{1}{2}\,;$$

נניח גם כי $\mathbb{P}\left(A_1 \right) = \frac{2}{3}$, והאינדיקטורים X_n של המאורעות A_n מהווים שרשרת מרקוב.

(א) מצאו (אם קיימים)

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(A_n \,\middle|\, A_1 \right)\,; \quad \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(A_n \,\middle|\, \Omega\setminus A_1 \right)\,; \quad \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(A_1 \cap A_n \right); \quad \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\left((X_1 - \tfrac{2}{3})(X_n - \tfrac{2}{3}) \right).$$

....

(ב) הוכיחו כי

$$\frac{X_1 + \dots + X_n}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{2}{3}$$

ב־ L_2 ובהסתברות.

שאלה 4

=40

נתון מספר $X_0 = (0.\beta_1\beta_2\dots)_2 \in (0,1)$. מגרילים K_1 לפי התפלגות גאומטרית עם פרמטר $p \in (0,1)$, כלומר $\mathbb{P}\left(K_1 = k \right) = (1-p)^{k-1}p$ עבור $k = 1, 2, \dots$, ויוצרים מספר חדש

$$X_1 = (0.\beta_{K_1}\beta_1\beta_2\dots)_2 = \frac{X_0 + \beta_{K_1}}{2}\,.$$

באותו אופן מגרילים K_2 (בלתי תלוי ב־ K_1) ויוצרים X_2 מ־ X_1, K_2; וכך הלאה; מקבלים תהליך $(X_n)_n$. הוכיחו כי:

(א) התהליך

$$M_n = \mathbb{P}\left(\beta_{K_n, n-1} = 1 \,\middle|\, K_0, \dots, K_{n-1} \right) = \sum_{k=1}^{\infty} (1-p)^{k-1} p \beta_{k,n-1}$$

הוא מרטינגל; כאן $\beta_{k,n-1}$ הן ספרות בינריות של X_{n-1}.

....

(ב) כמעט בטוח, או $M_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ או $M_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$.

....

(ג) כמעט בטוח, או $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ או $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$.

רמז: (ב) תזכרו תהליכי הסתעפות, הכחדה עבור $p = \frac{1}{2}$.
