סמסטר ב', מועד א', תשע"ג
תאריך הבחינה: 24.06.2013
מספר קורס: 0366-3098

בחינה בהסתברות למתמטיקאים

המורה: פרופ' בוריס צירלסון

משך הבחינה: 3 שעות.
מותר להשתמש בדף סיכום אישי.
בחרו 3 מתוך 4 השאלות הבאות.

בהצלחה!

שאלה 1

=40

יהי $\alpha_{k,p}(x)$ ספרה ה־k־ית של $x \in (0,1)$ בבסיס $p = 2,3,\dots$; כלומר $x = (0.\alpha_{1,p}\alpha_{2,p}\dots)_p$. נגדיר

$$T_p(x) = \inf\{k : \alpha_{k,p}(x) = 0, \alpha_{k+1,p}(x) = 1, \dots, \alpha_{k+p-1,p}(x) = p-1\}\,.$$

הוכיחו כי לכמעט כל x מתקיים

(א) $T_p(x) > p^{p-2}$ לכל p מספיק גדול.

(ב) $T_p(x) \le p^{p+2}$ לכל p מספיק גדול.

(ג) רדיוס ההתכנסות של טור החזקות $\displaystyle\sum_p T_p(x)\frac{z^p}{p!}$ שווה ל־e^{-1}.

שאלה 2

=35

יהיו $X_1, X_2, \dots$ משתנים מקריים.

(א) נניח כי $\mathbb{E}\big(f(X_n)\big) \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$ לכל פונקציה $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ גזירה ברציפות וחסומה. הוכיחו כי $\mathbb{P}\big(X_n \le a\big) \xrightarrow[n\to\infty]{} a$ לכל $a \in (0,1)$.

....

(ב) נניח כי

$$\mathbb{E}\big(f(X_n)\big) \xrightarrow[n\to\infty]{} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^{2i}} \sum_{k=1}^{2^i} f\Big(\frac{k}{2^i}\Big)$$

לכל פונקציה $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ גזירה ברציפות וחסומה. הוכיחו כי

$$\mathbb{P}\left(X_n \le a\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^{2i}} \sum_{k=1}^{2^i} \mathbf{1}_{(-\infty,a]}\Big(\frac{k}{2^i}\Big)$$

לכל מספר אי–רציונלי $a\in\mathbb{R}$.

....

(ג) נניח כי הגבול $\lim_n \mathbb{E}\big(f(X_n)\big)$ קיים לכל פונקציה $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ גזירה ברציפות וחסומה. האם נובע כי הגבול $\lim_n \mathbb{P}\left(X_n \le a\right)$ קיים לכל $a\in\mathbb{R}$? הוכיחו את התשובה.

שאלה 3

=30

יהיו X_n מ"מ ב"ת ש"ה, $\mathbb{P}\left(X_1=-1\right)=\mathbb{P}\left(X_1=0\right)=\mathbb{P}\left(X_1=1\right)=\frac{1}{3}$. נגדיר $S_n=X_1+\dots+X_n$ ו– $T=\inf\{n: S_n=100\}$. הוכיחו כי:

(א)

$$\mathbb{P}\left(S_{2013}=70\ \&\ T<2013\right)=\mathbb{P}\left(S_{2013}=130\right).$$

(ב)

$$\mathbb{P}\left(S_1<100,\dots,S_{2013}<100\ \&\ S_{2013}=70\right)=\mathbb{P}\left(S_{2013}=70\right)-\mathbb{P}\left(S_{2013}=130\right).$$

שאלה 4

=40

(א) נתונה פונקציה $f:\mathbb{Z}^2\to\mathbb{R}$ המקיימת

$$(*)\qquad f(k,l)=\frac{1}{4}\big(f(k-1,l)+f(k+1,l)+f(k,l-1)+f(k,l+1)\big)$$

לכל $(k,l)\in\mathbb{Z}^2$. נניח כי f חסומה מלמטה; הוכיחו כי f קבועה.

....

(ב) אותו הדבר, אך $(*)$ מתקיים בכל נקודה $(k,l)\in\mathbb{Z}^2$ חוץ מנקודה אחת (אולי). נניח כי f חסומה; הוכיחו כי f קבועה.

רמז: (א) הילוך מקרי דו–ממדי פשוט, מרטינגל; (ב) ההילוך, עצירה, מרטינגל.
