סמסטר ב', מועד ב', תשס"ו
תאריך הבחינה: 26.09.2006
מספר קורס: 0365-2100

בחינה בהסתברות

המורה: פרופ' בוריס צירלסון

משך הבחינה: 3.5 שעות.
מותר להשתמש בדף סכום אישי ובמחשבון.
סה"כ הנקודות האפשרי הוא 120 (הציון לא יעלה על 100). בספק אם במסגרת הזמן הנתון ייתאפשר לענות על כל השאלות. לפיכך כדאי לעיין בכל השאלות בטרם ניגשים לפתרונן.

בהצלחה!

שאלה 1

=30

10 (א) יהיו U_1, U_2 מ"מ ב"ת ש"ה, בעלי התפלגות אחידה $\mathrm{U}(0,1)$. מצא את ההסתברות $\mathbb{P}\left(2U_1 \le U_2 \le \frac{1}{2}\right)$.

. . . .

10 (ב) יהיו U_1, U_2 מ"מ ב"ת ש"ה, בעלי התפלגות אחידה $\mathrm{U}(0,1)$. נגדיר

$$V_1 = \max(U_1^2, U_2^2), \qquad V_2 = \frac{\min(U_1, U_2)}{\max(U_1, U_2)}.$$

הוכח ש- V_1, V_2 הם גם מ"מ ב"ת ש"ה, בעלי התפלגות אחידה $\mathrm{U}(0,1)$.

. . . .

10 (ג) יהיו X_1, X_2 מ"מ ב"ת ש"ה, X^* פונקצית ערכי החלוקה שלהם, ו- V_1, V_2 מ"מ ב"ת ש"ה, בעלי התפלגות אחידה $\mathrm{U}(0,1)$.
הוכח שההתפלגות המשותפת של שני המ"מ

$$\max(X_1, X_2), \qquad \min(X_1, X_2)$$

זהה להתפלגות המשותפת של שני המ"מ

$$X^*(\sqrt{V_1}), \qquad X^*(V_2\sqrt{V_1}).$$

רמז: השתמש ב-(ב); $(X_1, X_2) \sim (X^*(U_1), X^*(U_2))$.

שאלה 2

=40

10 (א) יהי $\omega = (0.\alpha_1\alpha_2\dots)_{10}$ פיתוח עשרוני, ויהי

$$X(\omega) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha_k}{k(k+1)}$$

מ"מ, בו ω מתפלג אחיד ב- $(0,1)$.
מצא $\mathbb{E}X$.

. . . .

10 (ב) האם קיימים מאורע A ומ"מ X,Y כאלה ש- $\mathbb{P}\left(A \,\middle|\, X\right) < \frac{1}{2}$, $\mathbb{P}\left(A \,\middle|\, Y\right) > \frac{1}{2}$ כמעט בטוח?

. . . .

10 (ג) עבור אלו $a \in \mathbb{R}$ קיים מ"מ X כך ש- $0 \le X \le 5$ כמעט בטוח, $\mathrm{Me}(X) = 3$ (חציון), ו- $\mathbb{E}X = a$?

. . . .

10 (ד) נניח שמ"מ X בעל צפיפות f_X לא רציפה בנקודה 3 אבל בעלת גבול מימין $f(3+)$. האם נובע ש-

$$n\,\mathbb{P}\left(3 + \tfrac{1}{n} < X < 3 + \tfrac{2}{n}\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} f_X(3+) \quad ?$$

שאלה 3

=50

נגיד שמ"מ X (וגם ההתפלגות שלו) הוא *מרוכז*, אם קיים $x \in \mathbb{R}$ כך ש- $\mathbb{P}\left(x \le X \le x+1\right) \ge 0.9$.

---

10 (א) נניח שמ"מ $Y = X + e^X$ הוא מרוכז. הוכח שגם X מרוכז.

רמז: אם $x + e^x = y$ אז $x + 1 + e^{x+1} \ge y + 1$.

. . . .

10 (ב) נניח ש- $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ פונקציות עולות, ומ"מ $f(X) + g(X)$ הוא מרוכז. הוכח שגם $f(X)$ מרוכז.

רמז: תתבונן בקבוצת ערכי $f(x)$ עבור ה- x -ים המקיימים $y \le f(x) + g(x) \le y + 1$.

. . . .

10 (ג) יהיו X,Y מ"מ כך ש- Y מרוכז. הוכח שההתפלגות המותנה של Y בהנתן $X = x$ היא מרוכזת עבור x אחד לפחות (ויתרה מזו, עבור קבוצה לא זניחה של x -ים).

רמז: תניח את ההפך; $\mathbb{P}\left(A\right) = \mathbb{E}\mathbb{P}\left(A \,\middle|\, X\right)$.

. . . .

(ד) יהיו X,Y מ"מ ב"ת כך ש- $X+Y$ מרוכז. הוכח שגם X מרוכז. 10

רמז: השתמש ב-(ג).

. . . .

(ה) יהיו X_1,X_2 מ"מ ב"ת ש"ה כאלה ש- X_1+X_2 הוא מרוכז. הוכח ש- $\max(X_1,X_2)$ הוא מרוכז. 10

רמז: השתמש ב-1(ג), 3(ב) ו-3(ג);

$X_1+X_2=\max(X_1,X_2)+\min(X_1,X_2)\sim X^*(\sqrt{V_1})+X^*(V_2\sqrt{V_1})$;

התנה ב- V_2 .