סמסטר א', מועד ב', תשס"א
תאריך הבחינה: 10.09.2001
מספר קורס: 0365-2100

בחינה בהסתברות

המורה: פרופ' בוריס צירלסון

משך הבחינה: 3.5 שעות.
מותר להשתמש בדף סכום אישי, טבלת אינטגרלים ובמחשבון.
סה"כ הנקודות האפשרי הוא 120 (הציון לא יעלה על 100). בספק אם במסגרת הזמן הנתון ייתאפשר לענות על כל השאלות. לפיכך כדאי לעיין בכל השאלות בטרם ניגשים לפתרונן.

בהצלחה!

שאלה 1

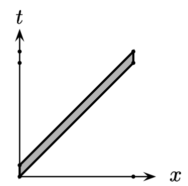
=30

יהי X מ"מ בעל התפלגות אחידה ב- $(0,1)$, ו- $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ פונקציה רציפה. נגדיר מ"מ

$$Y = 10\int_X^{X+0.1} h(t)\,dt$$

(ממוצע בקטע מקרי).

(א) הראה ש- $\mathbb{E}Y = \int v(t)h(t)\,dt$ עבור פונקציה מסוימת $v:\mathbb{R}\to[0,\infty)$. (פונקציה אחת v עבור כל h.) 10



רמז: $Y=\varphi(X)$; משפט Fubini.

. . . .

(ב) תאר את הפונקציה v באמצעות נוסחה וגם גרף. 10

. . . .

(ג) האם קיים מ"מ Z כך ש- $\mathbb{E}Y=\mathbb{E}h(Z)$? (מ"מ אחד Z עבור כל h.) 10

שאלה 2

=30

יהיו $Z_1, Z_2, \ldots$ מ"מ ב"ת בעלי התפלגות נורמלית $\mathrm{N}(0,1)$. יהי

$$X = \frac{1}{2}\big(Z_1^2 + \cdots + Z_{2N}^2\big)\,,$$

כאשר N הוא מ"מ בעל התפלגות גאומטרית $\mathrm{G}(p)$ (המתחילה ב– 1), כלומר,

$$\mathbb{P}\,\big(\,N = n\,\big) = pq^{n-1}\,, \quad q = 1 - p\,,$$

ו– N הוא ב"ת ב– $Z_1, Z_2, \ldots$.

(א) מצא את הצפיפות המותנית $f_{X|N=n}(x)$ ואת הצפיפות השולית $f_X(x)$. זהה את שתי ההתפלגויות המתאימות. 10

....

(ב) מצא את ההסתברות המותנית 10

$$p_{N|X=x}(n)\,.$$

זהה את ההתפלגות המותנית של $N-1$ בהנתן X .

....

(ג) מצא את התוחלת המותנית $\mathbb{E}\,\big(\,N\,\big|\,X = x\,\big)$. בדוק ש– $\mathbb{E}\big(\mathbb{E}\,\big(\,N\,\big|\,X\,\big)\big) = \mathbb{E}N$. 10

שאלה 3

=30

עבור כל $n = 1, 2, \ldots$ נבחרה באקראי נקודה (X_n, Y_n) מתוך העיגול $x^2 + y^2 < r_n^2$ (לפי התפלגות אחידה בעיגול). הנקודות $(X_1, Y_1), (X_2, Y_2), \ldots$ ב"ת. ענה על השאלות הבאות בשני המקרים: $r_n = n$ וגם $r_n = \sqrt{n}$.

(א) קבוצה מקרית $\{n : X_n^2 + Y_n^2 < 100\}$, האם היא סופית או אינסופית כמעט תמיד? 10

....

(ב) האם $\sqrt{X_n^2 + Y_n^2} \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$ כמעט תמיד? 10

....

(ג) סדרה מקרית של הנקודות $(X_1, Y_1), (X_2, Y_2), \ldots$, האם היא צפופה במישור $\mathbb{R}^2$ כמעט תמיד? 10

שאלה 4

=30

יהיו $X_1, X_2, \ldots$ מ"מ ב"ת, בעלי התפלגות אחידה ב־ $(0,1)$.

---

10 (א) מצא את

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(X_1 \ldots X_n \le e^{-n} \right).$$

רמז: חשוב על $Z_n = \frac{(-\ln X_1)+\cdots+(-\ln X_n)-n}{\sqrt{n}}$.

....

10 (ב) נתבונן בחציון b_n ורבעונים a_n, c_n של הקפל $X_1 \ldots X_n$, כלומר,

$$\mathbb{P}\left(X_1 \ldots X_n \le a_n \right) = \frac{1}{4}, \quad \mathbb{P}\left(X_1 \ldots X_n \le b_n \right) = \frac{1}{2}, \quad \mathbb{P}\left(X_1 \ldots X_n \le c_n \right) = \frac{3}{4}.$$

הוכח ש־

$$\frac{a_n}{b_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0, \quad \frac{b_n}{c_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

רמז: חשוב על חציון ורבעונים של Z_n .

....

10 (ג) נתבונן גם בתוחלת $d_n = \mathbb{E}\left(X_1 \ldots X_n\right)$. עבור n מספיק גדול, סדר את ארבעה המספרים a_n, b_n, c_n, d_n בסדר עולה.
