סמסטר א', מועד א', תשס"א
תאריך הבחינה: 07.02.2001
מספר קורס: 0365-2100

בחינה בהסתברות

המורה: פרופ' בוריס צירלסון

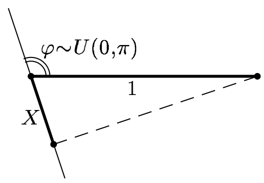
משך הבחינה: 3 שעות.
מותר להשתמש בדף סכום אישי, טבלת אינטגרלים ובמחשבון.
סה"כ הנקודות האפשרי הוא 120 (הציון לא יעלה על 100). בספק אם במסגרת הזמן הנתון ייתאפשר לענות על כל השאלות. לפיכך כדאי לעיין בכל השאלות בטרם ניגשים לפתרונן.

בהצלחה!

שאלה 1

=30

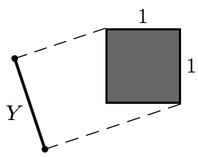
8 (א) מטילים קטע באורך 1 על כיוון מקרי (הכול במישור). מתקבל קטע שאורכו $X \in [0,1]$ הוא משתנה מקרי.



מצא את פונקצית ההתפלגות (המצטברת) F_X, את הצפיפות f_X (אם קיימת), את פונקצית ערכי חלוקה X^*, את החציון (אם יחיד), ואת התוחלת $\mathbb{E}(X)$.

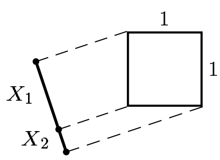
....

7 (ב) מטילים ריבוע 1×1 על כיוון מקרי; מתקבל קטע באורך Y.



מצא $\mathbb{E}(Y)$.

רמז:



....

8 (ג) הכלל את (ב) למצולע קמור שרירותי. הראה ש– $\mathbb{E}(Y)$ היא פרופורציונלית להיקף המצולע.

....

7 (ד) צורה קמורה אחת נמצאת בתוך צורה קמורה אחרת. האם יתכן שהיקף הצורה הראשונה הוא גדול מהיקף הצורה השניה? נמק.

שאלה 2

=30

יהיו $U_1, U_2, \dots$ מ"מ ב"ת בעלי התפלגות אחידה ב– $(0,1)$. יהי

$$X = \max(U_1, \dots, U_N)$$

כאשר N הוא מ"מ מתפלג אחיד ב– $\{1, 2, \dots, 1\,000\}$ ובלתי תלוי ב– $U_1, U_2, \dots$

---

8 (א) מצא את פונקצית ההתפלגות ואת הצפיפות של ההתפלגות המותנית

$$F_{X|N=n}(x)\,, \qquad f_{X|N=n}(x)\,,$$

ואת ההסתברות המותנית

$$p_{N|X=x}(n)$$

(אין צורך לחשב את הסכום של $1\,000$ איברים).

....

7 (ב) נניח עתה ש– N מתפלג אחיד ב– $\{1, 2, \dots, M\}$ כאשר M הוא פרמטר. הראה שקיים גבול עבור $p_{N|X=x}(n)$ של $M \to \infty$; מצא את הגבול (יש צורך לחשב את סכום הטור).

....

8 (ג) מכאן $p_{N|X=x}(n)$ הוא הגבול ($M \to \infty$). הראה ש– $p_{N|X=x}$ היא התפלגות. מצא את התוחלת שלה,

$$\mathbb{E}\left(N \,\middle|\, X = x \right)$$

רמז: ידוע ש– $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^{n-1} = \frac{1+x}{(1-x)^3}$.

....

7 (ד) זהה את ההתפלגות הרציפה הקרובה להתפלגות של מ"מ $\dfrac{N}{1\,000}$ בהנתן $X = 0.999$. (נמק; אבל אין צורך להוכיח התכנסות בהתפלגות.)

שאלה 3

=30

יהיו $A_1, A_2, \dots$ מאורעות ב"ת, $\mathbb{P}\left(A_k\right) = p_k$. נתבונן במציינים (אינדיקטורים) $X_k = \mathbf{1}_{A_k}$ ובמספר מקרי של מאורעות שהתרחשו

$$S = X_1 + X_2 + \dots$$

---

10 (א) יהי $p_k = 1/2^k$. האם יש סיכוי ש־ $S = 2001$? כלומר, האם ההסתברות $\mathbb{P}\left(S = 2001\right)$ מתאפסת או לא?
רמז. חשוב על $\mathbb{P}\left(X_1 = 1, \dots, X_{2001} = 1, X_{2002} = 0, X_{2003} = 0, \dots\right)$.

....

10 (ב) יהי $p_k \in (0,1)$. האם יתכן ש־ $\mathbb{P}\left(S = 2001\right) > 0$ אבל $\mathbb{P}\left(S = 3000\right) = 0$? הוכח. האם יתכן ש־ $\mathbb{P}\left(S = 2001\right) = 0$ אבל $\mathbb{P}\left(S = 3000\right) > 0$? הוכח.

....

10 (ג) הכלל את (ב) עבור $p_k \in [0,1]$ שרירותיים (לא בהכרח $p_k \in (0,1)$), ועבור $\mathbb{P}\left(S = k\right)$ לכל k (לאו דווקא 2001, 3000).

שאלה 4

=30

יש השערה שמ"מ $X_1, X_2, \dots$ הם ב"ת, בעלי התפלגות אחידה ב־ $(0,1)$. סטטיסטיקאי אחד דוחה את ההשערה אם מתקבל $X_1 < 0.05$. הסיכוי לדחות השערה נכונה שווה כמובן 5%.

---

7 (א) סטטיסטיקאי שני (כנראה לא מוסמך) דוחה את ההשערה אם מתקבל $X_1 X_2 < 0.05$. מה הסיכוי שהוא דוחה השערה נכונה?

....

8 (ב) הראה ש־

$$\mathbb{P}\left(X_1 \dots X_n > 0.05\right) < 0.6^n$$

לכל n מספיק גדול.
רמז. אי־שוויון מרקוב.

....

7 (ג) הראה ש־

$$\mathbb{P}\left(X_1 \dots X_n > 0.05\right) < 0.001^n$$

לכל n מספיק גדול.
רמז. מצא את ההתפלגות של מ"מ $-\ln(X_1 \dots X_n) = -\ln X_1 - \dots - \ln X_n$ והראה שהצפיפות שלה קטנה מאוד עבור n גדול.

8 (ד) הראה שאי–השוויון

$$e^{-1.1n} < X_1 \dots X_n < e^{-0.9n}$$

מתקיים בסופו של דבר, כמעט תמיד.
רמז. החוק החזק של המספרים הגדולים, עבור הלוגריתמים.