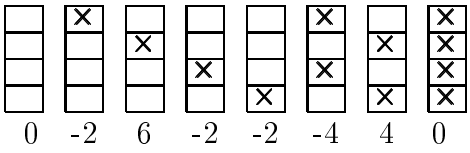
סמסטר ב', מועד א', תשס"א
מספר התלמיד_____ תאריך הבחינה: 19.06.2001
מספר קורס: 0365-1102

# בחינה במבוא להסתברות

המורה: פרופ' בוריס צירלסון

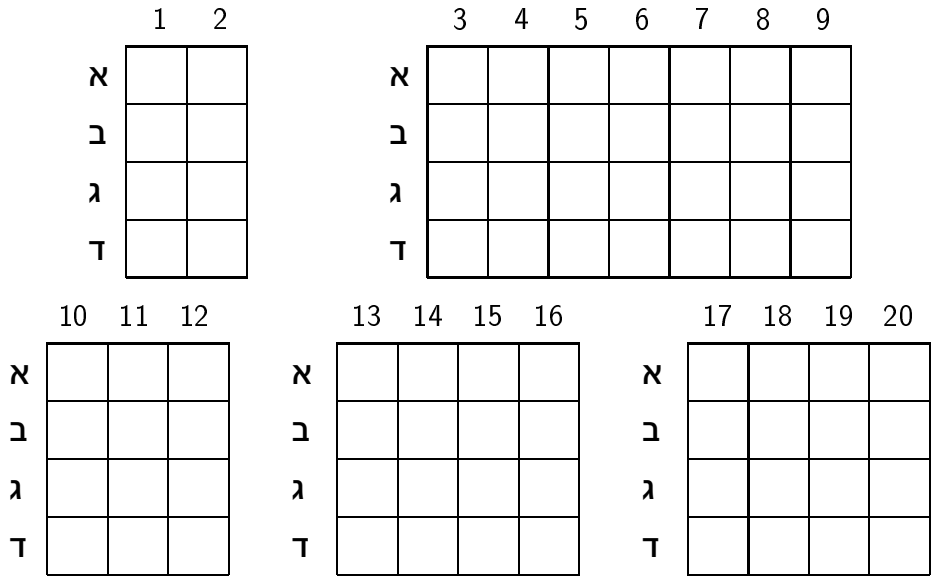
משך הבחינה: 3 שעות.
מותר להשתמש בדף סכום אישי, ובמחשב כיס.
השאלון מורכב מ-20 שאלות המבוססות על 5 סוגיות. רצוי לענות על כולן.
לכל שאלה ניתנות 3 תשובות. סמן בטבלת התשובות את התשובה הנראית לך נכונה.
באם כל התשובות נראות לך לא נכונות סמן (ד).
סימון התשובה הנכונה במקום המתאים בטבלה שבתחתית עמוד זה מזכה ב-6 נקודות זכות. סימון תשובה לא נכונה נושא שתי נקודות חובה.
הנבחן רשאי לסמן יותר מתשובה אחת באותה שאלה.

דוגמה:




סה"כ הנקודות האפשרי הוא 120.
לעזרתך מצורפת רשימת נוסחאות.

בהצלחה!



## סוגיה 1

ביצעו $10$ ניסוים מקריים בלתי תלויים. סיכוי להצלחה שווה $p$ בכל ניסוי, $0 < p < 1$ .
יהי $X$ מספר ההצלחות.

---

1. ההתפלגות של $X$ היא
(א) גיאומטרית (ב) בינומית (ג) אחידה

.....

2. התברר ש- $X = 1$ . יהי $U$ מספר הכשלונות לפני ההצלחה. ההתפלגות של $U$ היא
(א) בינומית (ב) גיאומטרית (ג) אחידה

---

## סוגיה 2

ביצעו $10$ ניסוים מקריים בלתי תלויים. סיכוי להצלחה שווה $p$ בכל ניסוי, $0 < p < 1$ .
יהי $X$ מספר ההצלחות. התברר ש- $X = 2$ . יהי
$U$ מספר הכשלונות לפני הצלחה ראשונה,
$V$ מספר הכשלונות בין הצלחה ראשונה לשניה,
$W$ מספר הכשלונות לאחר הצלחה שניה.

---

3. יהי $a = \mathbb{P}\left(U = 1, V = 3, W = 4 \,\middle|\, X = 2\right)$ ,
$b = \mathbb{P}\left(U = 4, V = 1, W = 3 \,\middle|\, X = 2\right)$
(א) $a > b$ לכל $p$ .
(ב) $a < b$ לכל $p$ .
(ג) יתכן ש- $a < b$ , $a = b$ , $a > b$ . זה תלוי ב- $p$ .

.....

4. יהי $a = \mathbb{P}\left(W = 4 \,\middle|\, X = 2\right)$ , $b = \mathbb{P}\left(U = 4 \,\middle|\, X = 2\right)$ .
(א) יתכן ש- $a < b$ , $a = b$ , $a > b$ . זה תלוי ב- $p$ .
(ב) $a < b$ לכל $p$ .
(ג) $a > b$ לכל $p$ .

.....

5. תהי
$a$ ההסתברות לכך ששתי ההצלחות הן רצופות,
$b$ ההסתברות לכך שההצלחה הראשונה היא בניסוי הראשון,
$c$ ההסתברות לכך ששתי ההצלחות הן בשני ניסוים ראשונים.
(כל ההסתברויות --- בהנתן $X = 2$ .)
(א) $a = b > c$ לכל $p$ .
(ב) $b > a > c$ לכל $p$ .
(ג) $a = c < b$ לכל $p$ .

.....

6. ההסתברות (בהנתן $X = 2$ ) ששתי ההצלחות הן רצופות היא

(א) $p$ . (ב) $1/45$ . (ג) $1/5$ .

.....

7. מצא את $\mathbb{E}\left(U \,\middle|\, X=2\right)$ .

(א) $\frac{10}{3}p-1$ . (ב) $\frac{1-p}{p}$ . (ג) $8/3$ .

רמז: התבונן ב- $\mathbb{E}\left(U+V+W\right)$ .

.....

8. מצא את מקדם המתאם בין $U,V$ (בהנתן $X=2$ ).

(א) $-1/3$ . (ב) $-1/2$ . (ג) $+1/3$ .

רמז: התבונן ב- $\mathbb{V}\left(U+V+W\right)$ .

.....

9. מצא את התחזית הלינארית (האופטימלית) של $V$ באמצעות $U$ (הכל בהנתן $X=2$ ).

(א) $4-\frac{1}{2}U$ . (ב) $\frac{8}{3}-\frac{U}{2}$ . (ג) $\frac{8-U}{3}$ .

---

## סוגיה 3

$n$ שחקנים משתתפים במשחק מזל. כל שחקן קונה כרטיס רגיל או כרטיס זהב. אם ניקנו כרטיסי זהב, הזוכה נבחר באקראי מבין השחקנים שקנו כרטיס זהב. אם ניקנו רק כרטיסים רגילים, הזוכה נבחר באקראי מבין כלל השחקנים.
נניח שכל שחקן מחליט באקראי: כרטיס זהב בהסתברות $p$ , או כרטיס רגיל בהסתברות $q=1-p$ , באופן בלתי תלוי בשאר; $0<p<1$ .
נגדיר מאורעות
$A$ : דוד זוכה;
$B$ : דוד קונה כרטיס זהב.
$C$ : יש כרטיס זהב קנוי (לפחות אחד).
(דוד הוא אחד מהשחקנים).

---

10.

(א) $\mathbb{P}\left(A\right)=\mathbb{P}\left(A \,\middle|\, B\right)\mathbb{P}\left(B \,\middle|\, C\right)\mathbb{P}\left(C\right)$ .

(ב) $\mathbb{P}\left(A\right)=\frac{1}{n}$ .

(ג) $\mathbb{P}\left(A\right)=\mathbb{P}\left(C\right)\mathbb{P}\left(B \,\middle|\, C\right)\mathbb{P}\left(A \,\middle|\, B\cap C\right)$ .

.....

11.

(א) $A,B,C$ בלתי תלויים בזוגות, אבל תלויים כולם ביחד.

(ב) $A,C$ בלתי תלויים.

(ג) $A,B$ בלתי תלויים.

.....

12. מצא את $\mathbb{P}\left(A \middle| B\right)$.
(א) אי אפשר למצוא את ההסתברות בלי לדעת כמה קנו כרטיסי זהב.
(ב) $\frac{1-q^n}{np}$.
(ג) $\frac{1}{np}$.

---

## סוגיה 4

עבור הבעיה שהוצגה בסוגיה 3,
יהי $X$ מספר כרטיסי זהב קנויים.

---

13.
(א) ההתפלגות המותנית של $X$ בהנתן $A$ היא בינומית, $B(n,p)$.
(ב) ההתפלגות המותנית של $X$ בהנתן $C$ היא בינומית, $B(n,p)$.
(ג) ההתפלגות המותנית של $X$ בהנתן $B$ היא בינומית, $B(n,p)$.

.....

14.
(א) ההתפלגות המותנית של $X-1$ בהנתן $C$ היא $B(n-1,p)$.
(ב) ההתפלגות המותנית של $X-1$ בהנתן $B$ היא $B(n-1,p)$.
(ג) ההתפלגות המותנית של $X-1$ בהנתן $A$ היא $B(n-1,p)$.

.....

15.
(א) $\mathbb{P}\left(A \middle| X=k, B\right) = 1/k$ לכל $k=1,\ldots,n$.
(ב) $\mathbb{P}\left(A \middle| X=k\right) = 1/k$ לכל $k=1,\ldots,n$.
(ג) $\mathbb{P}\left(A \middle| X=k, C\right) = 1/k$ לכל $k=1,\ldots,n$.

.....

16. לכל משתנה מקרי $Y$ כזה ש- $Y-1 \sim B(n-1,p)$ מתקיים
(א) $\mathbb{E}(\frac{1}{Y}) = \frac{1-q^n}{np}$.
(ב) $\mathbb{E}(\frac{1}{Y}) = \frac{1}{(n-1)p+1}$.
(ג) $\mathbb{E}(\frac{1}{Y}) = \frac{1-q^{n+1}}{(n+1)p}$.

---

## סוגיה 5

עבור הבעיה שהוצגה בסוגיה 3,
מחיר של כרטיס רגיל הוא $K$ ש"ח, של כרטיס זהב $L$ ש"ח. הזוכה מקבל פרס $M$ ש"ח. יהי $Z$ הרווח של דוד (הפרש בין הכנסה והוצאה).

---

17. מצא את $\mathbb{E}(Z)$.

(א) $M \cdot \frac{1}{n} - Lp - Kq$.

(ב) $(M-L)\frac{1-q^n}{n} + (M-K)\frac{q^n}{n} - Lp - Kq$.

(ג) אי אפשר למצוא את התוחלת בלי לדעת איזה כרטיס קנה דוד.

.....

18. מצא את $\mathbb{E}\left(Z \,\middle|\, B\right)$.

(א) $M\frac{1-q^n}{n} - Lp$.

(ב) $M\frac{q^n}{np} - L$.

(ג) אי אפשר למצוא את התוחלת בלי לדעת כמה קנו כרטיסי זהב.

.....

19. מצא את $\mathbb{E}\left(Z \,\middle|\, \overline{B}\right)$.

(א) אי אפשר למצוא את התוחלת בלי לדעת כמה קנו כרטיסי זהב.

(ב) $M\frac{q^{n-1}}{n} - K$.

(ג) $M\frac{q^n}{n} - Kq$.

.....

20. מספר $p \in (0,1)$ נקרא הסתברות של שווי משקל, אם $\mathbb{E}\left(Z \,\middle|\, B\right) = \mathbb{E}\left(Z \,\middle|\, \overline{B}\right)$.
מצא את ההסתברות של שווי משקל (אם קיימת) עבור $n=3$.

(א) $p = \frac{3}{M}\sqrt{(K+L)^2 - 4K^2}$, אם זה שייך לקטע $(0,1)$.

(ב) $p = 2 - 3\frac{L-K}{M}$, אם זה שייך לקטע $(0,1)$.

(ג) אי אפשר למצוא את ההסתברות בלי לדעת כמה קנו כרטיסי זהב.

---

## רשימת נוסחאות

| ההתפלגות | | $\mathbb{P}\left(X=k\right)$ | $\mathbb{E}\left(X\right)$ | $\mathbb{V}\left(X\right)$ |
|---|---|---|---|---|
| בינומית | $B(n,p)$ | $\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$ | $np$ | $np(1-p)$ |
| גיאומטרית<br>המתחילה ב-0 | $G(p)$ | $p(1-p)^k$ | $\frac{1-p}{p}$ | $\frac{1-p}{p^2}$ |
| אחידה<br>ב-$\{1,\ldots,n\}$ | $U(n)$ | $\frac{1}{n}$ | $\frac{n+1}{2}$ | $\frac{n^2-1}{12}$ |
| בינומית-שלילית<br>המתחילה ב-0 | $NB(n,p)$ | $\binom{k+n-1}{n-1}p^n(1-p)^k$ | $n\frac{1-p}{p}$ | $n\frac{1-p}{p^2}$ |
| היפרגיאומטרית | $H(n;R,W)$ | $\frac{\binom{R}{k}\binom{W}{n-k}}{\binom{R+W}{n}}$ | $n\frac{R}{R+W}$ | $n\frac{RW}{(R+W)^2}\left(1-\frac{n-1}{R+W-1}\right)$ |

$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+x^3+\ldots\quad(-1<x<1)$$

$$e^x=1+x+\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{3!}x^3+\ldots$$

$$\mathbb{E}\left(Y\right)=\mathbb{E}\left(\mathbb{E}\left(Y\,\middle|\,X\right)\right)$$

$$\mathbb{V}\left(Y\right)=\mathbb{E}\left(\mathbb{V}\left(Y\,\middle|\,X\right)\right)+\mathbb{V}\left(\mathbb{E}\left(Y\,\middle|\,X\right)\right)$$

$$\hat{Y}=\rho\frac{\sigma_Y}{\sigma_X}(X-\mathbb{E}\left(X\right))+\mathbb{E}\left(Y\right)$$