

### בחינה במבוא להסתברות

המורים: פרופ' דוד גילת, פרופ' בוריס צירלסון

משך הבחינה: 3 שעות.

מותר להשתמש בדף סכום אישי, ובמחשב כיס.

השאלון מורכב מ-19 שאלות המבוססות על 4 סוגיות. רצוי לענות על כולן.

לכל שאלה ניתנות 4 תשובות שאחת ורק אחת מהן נכונה.

סימון התשובה הנכונה במקום המתאים בטבלה שבתחתית עמוד זה מזכה ב-6 נקודות זכות. סימון

תשובה לא נכונה נושא שתי נקודות חובה.

הנבחן רשאי לסמן יותר מתשובה אחת באותה שאלה, אך רצוי להימנע מניחושים.

	X				X		X
		X				X	X
			X		X		X
				X		X	X
0	-2	6	-2	-2	-4	4	0

דוגמה:

סה"כ הנקודות האפשרי הוא 114.

לעזרתך מצורפת רשימת נוסחאות וטבלת ההתפלגות הנורמלית.

בהצלחה!

	1	2	3	4
א				
ב				
ג				
ד				

	5	6	7	8	9
א					
ב					
ג					
ד					

	10	11	12	13	14	15
א						
ב						
ג						
ד						

	16	17	18	19
א				
ב				
ג				
ד				

## סוגיה 1

נתונים 3 מטבעות, אחד מהם מטבע הוגן הנופל על "ראש" או "זנב" בסיכויים שווים, והשניים האחרים מוטים לטובת "ראש" כך שהסיכוי לקבל "ראש" בהטלה בודדת של כל אחד מהם הוא  $\frac{3}{5}$ . בוחרים אחד משלשת המטבעות באופן מקרי ומטילים אותו פעמיים. יהי  $X_i$  ( $i = 1, 2$ ) מספר ה"ראשים" בהטלה  $i$  (שימו לב:  $X_i$  הוא 0 או 1), ויהי  $S = X_1 + X_2$  מספר ה"ראשים" הכולל בשתי ההטלות.

1. המשתנים המקרים  $X_1, X_2$  הם:
  - (א) בלתי מתואמים.
  - (ב) תלויים אך בלתי מתואמים.
  - (ג) בעלי מקדם מתאם חיובי.
  - (ד) בלתי תלויים.

2. ההסתברות  $\mathbb{P}(S = 1)$  היא:
  - (א)  $\frac{73}{150}$
  - (ב)  $\frac{221}{900}$
  - (ג)  $\frac{103}{200}$
  - (ד) אף אחד מהנ"ל.

3. בהינתן  $S = 1$ , הסיכוי (המותנה) שהמטבע שנבחר לביצוע ההטלות הוא המטבע ההוגן, היא:

- (א)  $\frac{25}{73}$
- (ב)  $\frac{1}{3}$
- (ג)  $\frac{100}{147}$
- (ד)  $\frac{26}{79}$

4. בהינתן  $S = 1$ , אם הטילו פעם נוספת את המטבע שנבחר, הסיכוי (המותנה) שבהטלה זו יתקבל "ראש" הוא:

- (א)  $\frac{289}{900}$
- (ב)  $\frac{17}{30}$
- (ג)  $\frac{153}{340}$
- (ד)  $\frac{413}{730}$

## סוגיה 2

נתונים  $n$  מטבעות. מטבע  $k$  הוא בעל סיכוי  $p_k$  לקבל "ראש" בהטלה בודדת,  $0 < p_k < 1$  ( $k = 1, \dots, n$ ). יהי  $S_n$  מספר ה"ראשים" המתקבל כאשר מטילים את  $n$  המטבעות באופן בלתי תלוי זה מזה. נתבונן במשתנה המקרי  $(-1)^{S_n}$ .

5. התוחלת  $\mathbb{E}((-1)^{S_n})$  מתאפסת אם ורק אם:
  - (א) כל המטבעות הוגנים.

- (ב) כל ה- $p_k$  יום שווים (לא בהכרח ל- $\frac{1}{2}$ ).
- (ג) לפחות אחד מהמטבעות הוא הוגן, כלומר  $p_k = \frac{1}{2}$  עבור  $k$  אחד לפחות.
- (ד) התוחלת הזאת אף פעם אינה מתאפסת.

בשאלות 9 - 6 נניח שכל ה- $p_k$  ימים שונים ונסמן את ערכם המשותף ב- $p$ ;  $0 < p < 1$ .

6. התוחלת של  $(-1)^{S_n}$  היא:

- (א)  $\frac{1-p}{n}$  (ב)  $n(1-2p)$   
 (ג)  $(1-p)^n$  (ד)  $(1-2p)^n$

7. הסיכוי ש- $S_n$  הוא זוגי הוא:

- (א)  $\frac{1}{2}(1+(1-2p)^n)$  (ב)  $\frac{1}{2}(1+(1-p)^n)$   
 (ג)  $1-(1-p)^n$  (ד)  $\frac{1}{2}(1-p^n)$

8. יהי  $\alpha_n = \mathbb{P}(S_n \text{ זוגי})$ , אזי ההסתברות המותנה שהתקבל "ראש" במטבע הראשון, בהינתן שבסה"כ התקבל מספר זוגי של "ראשים", הוא:

- (א)  $\frac{\alpha_{n-1}}{\alpha_n} p$  (ב)  $\frac{1-\alpha_{n-1}}{\alpha_n} p$   
 (ג)  $\frac{1-\alpha_{n-1}}{\alpha_n}$  (ד)  $\frac{1-\alpha_n}{\alpha_{n-1}}$

9. התוצאה במטבע הראשון והזוגיות של  $S_n$  הם בלתי תלויים אם ורק אם:

- (א)  $p > \frac{1}{2}$  (ב)  $p < \frac{1}{2}$  (ג)  $p = \frac{1}{2}$   
 (ד) אף פעם לא.

### סוגיה 3

נערך סקר לקביעת השכיחות  $p$  של אנשים באוכלוסיה שהם בעלי תכונה מסוימת. מאחר שהתכונה רגישה, יש חשש שאנשים יתבישו לומר אמת. לפיכך כל נסקר מתבקש להטיל קוביה (ולשמור את תוצאת ההטלה לעצמו) ולענות לסוקר בהתאמה לטבלה הבאה:

6	5	4	3	2	1	תוצאת הקוביה
אין	אמת	אמת	אמת	אמת	יש	תשובה לשאלה "האם יש לך התכונה"

10. השכיחות של תשובה "יש" היא:

- (א)  $\frac{1}{6} + \frac{2}{3}p$  (ב)  $\frac{1}{2}$   
 (ג)  $\frac{3}{2}p - \frac{1}{4}$  (ד) אף אחד מהנ"ל.

הערה: בשאלה זו הניחו שהמדגם מספיק גדול כך שאפשר לזהות שכיחות עם הסתברות.

מכאן ואילך בסוגיה זו, הניחו  $p = \frac{1}{2}$ .

11. משה ענה "יש". הסיכוי שהוא בעל התכונה הוא:
- (א)  $\frac{2}{3}$  (ב)  $\frac{4}{5}$  (ג)  $\frac{1}{2}$  (ד)  $\frac{5}{6}$
12. בניח שגודל המדגם הוא 10. בהינתן שכל עשרת הנסקרים ענו "אין", מה הסיכוי (המותנה) שלמרות זאת כולם בעלי התכונה?
- (א)  $\frac{1}{10! \cdot 2^{10}}$  (ב)  $\frac{1}{5^{10}}$  (ג)  $\frac{1}{10 \cdot 2^{10}}$  (ד)  $\frac{1}{6^{10}}$
13. בניח שגודל המדגם הוא 3000, ש-1000 מהם ענו "יש" ו-2000 ענו "אין". יהי  $X$  מספר בעלי התכונה במדגם. מה התוחלת (המותנה) של  $X$ ?
- (א) 1200 (ב)  $\frac{3500}{3}$  (ג) 1000 (ד)  $\frac{4000}{3}$
14. בהנחות של שאלה 13, מה השונות (המותנה) של  $X$ ?
- (א) 750 (ב) 0 (ג)  $\frac{1250}{3}$  (ד) 6000
15. בהנחות של שאלה 13, ההסתברות  $\mathbb{P}(X \leq 1150)$  לפי הקירוב הנורמלי שייכת לקטע
- (א) (0, 0.16) (ב) (0.15, 0.26)  
(ג) (0.25, 0.76) (ד) (0.75, 1)

#### סוגיה 4

נתונה מקלדת בעלת  $k$  מקשים. קוף מבצע סדרה של הקשות בלתי תלויות ובעלות התפלגות אחידה על מקשי המקלדת. יהי  $k = 11$  והמקשים הם  $[0], [1], \dots, [9]$ .  
  
 המחשב מפרש את הקלט כמספר  $X$  (בכתיב עשרוני). הקלט נפסק בהקשה ראשונה של . לדוגמה:

<input type="text" value="Enter"/>	0 <input type="text" value="Enter"/>	0020020 <input type="text" value="Enter"/>	2002 <input type="text" value="Enter"/>	קלט
0	0	20020	2002	$X$

16. מה הסיכוי ש- $X = 2002$ ?
- (א)  $\frac{1}{10 \cdot 11^4}$  (ב)  $\frac{10}{9 \cdot 11^5}$  (ג)  $\frac{1}{11^4}$  (ד)  $\frac{1}{11^5}$
- בשלוש השאלות הבאות המקלדת מורכבת מ-9 המקשים  $[1], \dots, [9]$ , ועוד  $(k-9)$  מקשים אחרים שכל אחד מהם פועל כמו . כלומר מפסיק את הקלט. (שימו לב

שאלון מקשה  $0$  אבל למרות זאת יתכן ש- $X = 0$  . יהי  $N$  מספר הספרות העשרוניות של  $X$  ונסכים ש- $N = 0$  כאשר  $X = 0$  .

17. ההתפלגות של  $N + 1$  היא:

(א) היפרגיאומטרית,  $H(1; k - 9, 9)$  .

(ב) בינומית,  $B\left(k, \frac{k-9}{k}\right)$  .

(ג) גיאומטרית,  $G\left(\frac{k-9}{k}\right)$  .

(ד) בינומית-שלילית,  $NB\left(10, \frac{k-9}{k}\right)$  .

18. התוחלת המותנה של  $X$  בהינתן  $N = 5$  היא:

(א) 50 000 . (ב) 49 999.5 .

(ג) 55 555 . (ד) 45 000.5 .

19. התוחלת של  $X$  היא סופית:

(א) אף פעם לא.

(ב) תמיד.

(ג) אם ורק אם  $X = 0$  .

(ד) אם ורק אם  $k > 90$  .

## רשימת נוסחאות

$\mathbb{V}(X)$	$\mathbb{E}(X)$	$\mathbb{P}(X = k)$	ההתפלגות	
$np(1-p)$	$np$	$\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$	$B(n, p)$	בינומית
$\lambda$	$\lambda$	$\frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$	$P(\lambda)$	פואסון
$\frac{1-p}{p^2}$	$\frac{1}{p}$	$p(1-p)^{k-1}$	$G(p)$	גיאומטרית
$\frac{n^2-1}{12}$	$\frac{n+1}{2}$	$\frac{1}{n}$	$U(n)$	אחידה $\{1, \dots, n\}$ -ב
$n \frac{1-p}{p^2}$	$\frac{n}{p}$	$\binom{k-1}{n-1} p^n (1-p)^{k-n}$	$NB(n, p)$	בינומית-שלילית
$n \frac{RW}{(R+W)^2} \left(1 - \frac{n-1}{R+W-1}\right)$	$n \frac{R}{R+W}$	$\frac{\binom{R}{k} \binom{W}{n-k}}{\binom{R+W}{n}}$	$H(n; R, W)$	היפרגיאומטרית

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots \quad (-1 < x < 1)$$

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \dots$$

$$\mathbb{E}(Y) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(Y|X))$$

$$\mathbb{V}(Y) = \mathbb{E}(\mathbb{V}(Y|X)) + \mathbb{V}(\mathbb{E}(Y|X))$$

$$\hat{Y} = \rho \frac{\sigma_Y}{\sigma_X} (X - \mathbb{E}(X)) + \mathbb{E}(Y)$$