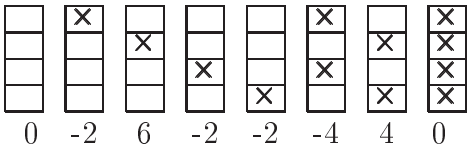
סמסטר א', מועד א', תשס"ב
מספר התלמיד_____ תאריך הבחינה: 26.02.2002
מספר קורס: 0365-1102

בחינה במבוא להסתברות

המורה: פרופ' דוד גילת, פרופ' בוריס צירלסון

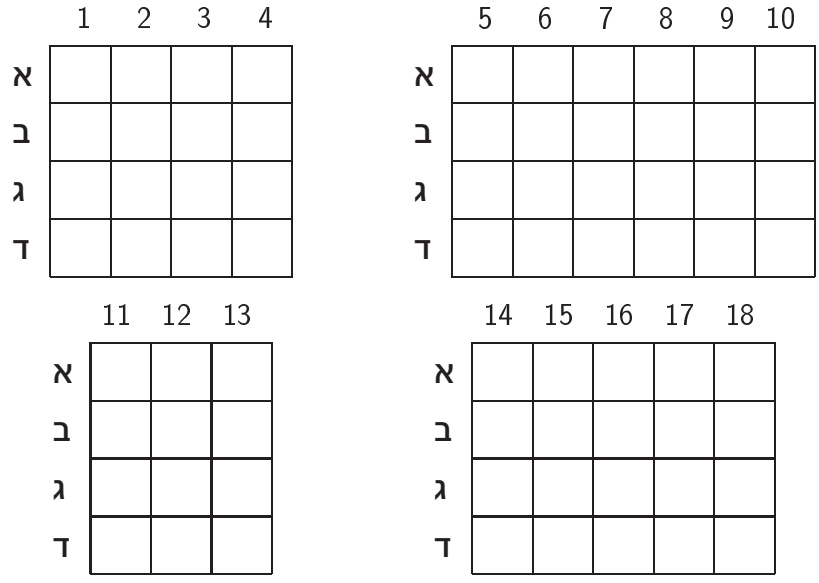
משך הבחינה: 3 שעות.
מותר להשתמש בדף סכום אישי, ובמחשב כיס.
השאלון מורכב מ-18 שאלות המבוססות על 4 סוגיות. רצוי לענות על כולן.
לכל שאלה ניתנות 4 תשובות שאחת ורק אחת מהן נכונה (הנימוק הנכון חשוב לא פחות מן התשובה המספרית).
סימון התשובה הנכונה במקום המתאים בטבלה שבתחתית עמוד זה מזכה ב-6 נקודות זכות. סימון תשובה לא נכונה נושא שתי נקודות חובה.
הנבחן רשאי לסמן יותר מתשובה אחת באותה שאלה.

דוגמה:



סה"כ הנקודות האפשרי הוא 108.
לעזרתך מצורפת רשימת נוסחאות.

בהצלחה!



סוגיה 1

במרחב הסתברות (Ω, P) נתונים שלשה מאורעות A_1, A_2, A_3 בעלי ההסתברויות $\mathbb{P}\left(A_1\right) = \frac{1}{5}$, $\mathbb{P}\left(A_2\right) = \frac{1}{4}$, $\mathbb{P}\left(A_3\right) = \frac{1}{2}$. נתבונן במשתנה המקרי N שהוא מספר המאורעות מבין A_1, A_2, A_3 המתרחשים.

---

1. ההסתברות $\mathbb{P}\left(N = 3\right)$ היא:
(א) $\frac{1}{40}$. (ב) $\frac{1}{5}$. (ג) 0 .
(ד) אין די נתונים לחישוב הסתברות זו.

.....

2. התוחלת של N היא:
(א) $\frac{3}{2}$. (ב) 1 . (ג) $\frac{19}{20}$.
(ד) אין די נתונים לחישוב $\mathbb{E}(N)$.

.....

3. השונות של N היא:
(א) 1 . (ב) $\frac{239}{400} = \frac{4}{25} + \frac{3}{16} + \frac{1}{4}$. (ג) $\frac{141}{400} = \frac{1}{25} + \frac{1}{16} + \frac{1}{4}$.
(ד) אין די נתונים לחישוב השונות של N .

.....

4. מבין שלשת המצבים הבאים, השונות של N היא קטנה ביותר כאשר:
(א) A_1, A_2, A_3 בלתי תלויים.
(ב) A_1, A_2, A_3 זרים בזוגות.
(ג) $A_1 \subset A_2 \subset A_3$.
(ד) אותה השונות בכל המקרים.

סוגיה 2

קופסה מכילה מספר מקרי X של כדורים לבנים ועוד $100 - X$ כדורים אדומים ($0 \leq X \leq 100$). ההתפלגות של X לא ידועה, אך ידוע ש- $\mathbb{E}(X) = 25$. מוציאים 2 כדורים מהכד באופן מקרי עם החזרה.

---

5. ההסתברות שהכדור הראשון הוא לבן היא:
(א) $\frac{1}{4}$. (ב) $\frac{25!\,75!}{100!}$.
(ג) אי אפשר לחשב הסתברות זו בלי לדעת את הערך של X .
(ד) כדי לחשב הסתברות זו אין צורך בערך של X , אבל דרושה ההתפלגות של X .

.....

6. ההסתברות ששני הכדורים הם לבנים היא:
(א) $\frac{25 \cdot 24}{100 \cdot 99}$. (ב) $\frac{1}{16}$.
(ג) אי אפשר לחשב הסתברות זו בלי לדעת את הערך של X .
(ד) כדי לחשב הסתברות זו אין צורך בערך של X , אבל דרושה ההתפלגות של X .

.....

7. הצבעים של שני הכדורים הם בלתי תלויים:
(א) אם ורק אם ההתפלגות של X היא אחידה.
(ב) אף פעם לא.
(ג) אם ורק אם ההתפלגות של X היא מנוונת (כלומר, X קבוע).
(ד) תמיד.

.....

8. בנוסף לתוחלת הנתונה, ידוע שהשונות של X היא 25 . ההסתברות ששני הכדורים הם לבנים היא:
(א) $\frac{13}{200}$. (ב) $\frac{1}{16}$.
(ג) אי אפשר לחשב הסתברות זו בלי לדעת את הערך של X .
(ד) כדי לחשב הסתברות זו אין צורך בערך של X , אבל דרושה ההתפלגות של X .

.....

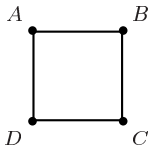
9. כמו שאלה 8, אלא שהכדור השני הוצא מבלי להחזיר קודם את הראשון.
(א) $\frac{13}{200}$. (ב) $\frac{25}{396}$.
(ג) אי אפשר לחשב הסתברות זו בלי לדעת את הערך של X .
(ד) כדי לחשב הסתברות זו אין צורך בערך של X , אבל דרושה ההתפלגות של X .

.....

10. בהינתן התוחלת והשונות של X כנ"ל, האם יתכן ש- $\mathbb{P}\left(X > 75\right) = \frac{1}{5}$?
(א) לא, מפני שהי קטנה מ- $\frac{1}{9}$ לפי אי-שוויון מרקוב.
(ב) כן, מפני שהסתברות זו קטנה מ- $\frac{1}{3}$ לפי אי-שוויון מרקוב.
(ג) לא, מפני שהיא קטנה מ- $\frac{1}{100}$ לפי אי-שוויון צ'בישב.
(ד) אף אחד מהנ"ל.

סוגיה 3

כל צלע בריבוע $ABCD$ היא פתוחה או סגורה בסיכוי $1/2$ באופן בלתי תלוי בצלעות האחרות.



---

11. הסיכוי שיש מסלול פתוח בין A ל- C הוא:

(א) $\frac{7}{16}$. (ב) $\frac{1}{2}$. (ג) $\frac{9}{16}$. (ד) אף אחד מהנ"ל.

.....

12. בהינתן שהמסלול ABC פתוח, הסיכוי (המותנה) שיש מסלול פתוח מ- B ל- D הוא:

(א) $\frac{3}{4}$. (ב) $\frac{5}{8}$. (ג) $\frac{3}{8}$. (ד) $\frac{1}{4}$.

.....

13. בהינתן שיש מסלול פתוח בין A ל- C, הסיכוי (המותנה) שיש גם מסלול פתוח בין B ל- D הוא:

(א) $\frac{5}{7}$. (ב) $\frac{3}{4}$. (ג) $\frac{5}{16}$. (ד) $\frac{2}{7}$.

סוגיה 4

נתונה קוביה עם פאה אחת אדומה, שתי פאות שחורות ושלוש פאות לבנות. מבצעים סדרת הטלות בלתי תלויות של הקוביה עד שמתקבלת פאה לא אדומה.

---

14. ההסתברות שבהטלה האחרונה התקבלה פאה לבנה היא:

(א) $\frac{3}{5}$. (ב) $\frac{5}{6}$. (ג) $\frac{1}{2}$. (ד) אף אחד מהנ"ל.

.....

15. יהי S מספר ההטלות (המקרי) שבוצע בשאלה 14, ובסדרה נפרדת של הטלות הקוביה, יהי T מספר ההטלות עד שלראשונה מתקבלת פאה אדומה. התוחלת $\mathbb{E}(ST)$ היא:

(א) 5. (ב) $\frac{36}{5}$. (ג) $\frac{25}{6}$. (ד) 36.

מטילים את הקוביה מספר קבוע, n, של פעמים. יהי
X מספר הפעמים שהתקבלה פאה אדומה,
Y מספר הפעמים שהתקבלה פאה שחורה,
Z מספר הפעמים שהתקבלה פאה לבנה.

---

16. השוה את השונות של $X+Y$ ושל Z :

(א) $\mathbb{V}\left(X+Y\right)=\mathbb{V}\left(Z\right)$.

(ב) $\mathbb{V}\left(X+Y\right)>\mathbb{V}\left(Z\right)$.

(ג) $\mathbb{V}\left(X+Y\right)<\mathbb{V}\left(Z\right)$.

(ד) ההשואה תלויה ב- n .

.....

17. מקדם המתאם $r(X,Y)$ הוא:

(א) $-\frac{1}{\sqrt{10}}$. (ב) $+\frac{1}{\sqrt{10}}$. (ג) $-\frac{1}{10}$.

(ד) תלוי ב- n .

.....

18. השונות של $X-Y$ היא:

(א) $\frac{17}{36}n$. (ב) $\frac{n}{4}$. (ג) $\frac{17}{36}n^2$.

(ד) לא תלויה ב- n .

רשימת נוסחאות

ההתפלגות		$\mathbb{P}\left(X=k\right)$	$\mathbb{E}\left(X\right)$	$\mathbb{V}\left(X\right)$
בינומית	$B(n,p)$	$\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$	np	$np(1-p)$
פואסון	$P(\lambda)$	$\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$	λ	λ
גיאומטרית	$G(p)$	$p(1-p)^{k-1}$	$\frac{1}{p}$	$\frac{1-p}{p^2}$
אחידה ב-$\{1,\ldots,n\}$	$U(n)$	$\frac{1}{n}$	$\frac{n+1}{2}$	$\frac{n^2-1}{12}$
בינומית-שלילית	$NB(n,p)$	$\binom{k-1}{n-1}p^n(1-p)^{k-n}$	$\frac{n}{p}$	$n\frac{1-p}{p^2}$
היפרגיאומטרית	$H(n;R,W)$	$\frac{\binom{R}{k}\binom{W}{n-k}}{\binom{R+W}{n}}$	$n\frac{R}{R+W}$	$n\frac{RW}{(R+W)^2}\left(1-\frac{n-1}{R+W-1}\right)$

$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+x^3+\ldots \quad (-1<x<1)$$

$$e^x=1+x+\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{3!}x^3+\ldots$$

$$\mathbb{E}\left(Y\right)=\mathbb{E}\left(\mathbb{E}\left(Y\,\middle|\,X\right)\right)$$

$$\mathbb{V}\left(Y\right)=\mathbb{E}\left(\mathbb{V}\left(Y\,\middle|\,X\right)\right)+\mathbb{V}\left(\mathbb{E}\left(Y\,\middle|\,X\right)\right)$$

$$\hat{Y}=\rho\frac{\sigma_Y}{\sigma_X}(X-\mathbb{E}\left(X\right))+\mathbb{E}\left(Y\right)$$