

סמסטר א', מועד ב', תשס"ט  
 תאריך הבחינה: 20.03.2009  
 מספר קורס: 0365-1102

מספר מחברת \_\_\_\_\_  
 מספר ת.ז. \_\_\_\_\_

### בחינה במבוא להסתברות

המורים: פרופ' יצחק מלכסון, פרופ' בוריס צירלסון

משך הבחינה: 3 שעות.  
 מותר להשתמש בדף סכום אישי, ובמחשב כיס.  
 השאלון מורכב מ-19 שאלות המבוססות על 4 סוגיות. רצוי לענות על כולן.  
 לכל שאלה ניתנות 3 תשובות. סמן בטבלת התשובות את התשובה הנראית לך נכונה.  
 באם כל התשובות נראות לך לא נכונות סמן (ד).  
 סימון התשובה הנכונה במקום המתאים בטבלה שבתחתית עמוד זה מזכה ב-6 נקודות  
 זכות. סימון תשובה לא נכונה נושא שתי נקודות חובה.  
 הנבחן רשאי לסמן יותר מתשובה אחת באותה שאלה.

	X				X	X	X
		X			X	X	X
			X		X	X	X
				X		X	X
0	-2	6	-2	-2	-4	4	0

דוגמה:

סה"כ הנקודות האפשרי הוא 114.  
 לעזרתך מצורפת רשימת נוסחאות.

בהצלחה!

	1	2	3	4	5
א					
ב					
ג					
ד					

	6	7	8	9	10	11
א						
ב						
ג						
ד						

	12	13	14	15	16	17
א						
ב						
ג						
ד						

	18	19
א		
ב		
ג		
ד		

## סוגיה 1

מפזרים 20 כדורים (עם שמות מ-1 עד 20) בשלושה כדים, כך שכל  $3^{20}$  תוצאות הפיזור שוות סיכוי. נסמן ב-  $X_i$  את מספר הכדורים בעלי שם זוגי בכד ה-  $i$  ( $i = 1, 2, 3$ ), וב-  $Y_i$  את מספר הכדורים בעלי שם אי-זוגי בכד ה-  $i$ .

1.

(א)  $X_1$  ו-  $X_2$  תלויים, אך  $X_1$  ו-  $Y_1$  בלתי תלויים.

(ב)  $X_1$  ו-  $X_2$  בלתי תלויים, אך  $X_1$  ו-  $Y_1$  תלויים.

(ג)  $X_1$  ו-  $X_2$  תלויים, וגם  $X_1$  ו-  $Y_1$  תלויים.

2.

(א) מ"מ  $X_1 + X_2$  בעל התפלגות לא בינומית וגם מ"מ  $X_1 + Y_1$  בעל התפלגות לא בינומית.

(ב) מ"מ  $X_1 + X_2$  בעל התפלגות בינומית, וגם מ"מ  $X_1 + Y_1$  בעל התפלגות בינומית.

(ג) מ"מ  $X_1 + X_2$  בעל התפלגות בינומית, אך מ"מ  $X_1 + Y_1$  בעל התפלגות לא בינומית.

3. ההתפלגות המותנית של  $X_1$  בהנתן  $X_1 + Y_1 = 9$  היא  
(א) אחידה (ב) היפרגיאומטרית (ג) בינומית

4. ההתפלגות המותנית של  $X_1$  בהנתן  $X_1 + X_2 = 9$  היא  
(א) אחידה (ב) בינומית (ג) היפרגיאומטרית

5. ההתפלגות המותנית של  $X_1$  בהנתן  $Y_2 = 5$  היא  
(א) בינומית (ב) היפרגיאומטרית (ג) אחידה

## סוגיה 2

בהגרלת הלוטו המספר הזוכה נבחר באקראי (על פי התפלגות אחידה) כמספר שלם בין 1 ל-  $N$ . כל משתתף זכאי להמר על מספר יחיד, והפרס בסך  $M$  שקלים מחולק שווה בשווה בין כל הזוכים.

6. רחל בוחרת את ההימור שלה על פי התפלגות אחידה על הקבוצה  $\{1, 2, \dots, N\}$ . ההסתברות שרחל תנחש נכונה את המספר הזוכה היא:

$$\frac{1}{N} \quad (\text{א}) \quad \frac{1}{N^2} \quad (\text{ב}) \quad \frac{2}{N+1} \quad (\text{ג})$$

7. בני בוחר גם הוא את ההימור על פי התפלגות אחידה על הקבוצה  $\{1, 2, \dots, N\}$ , ובאופן בלתי תלוי בבחירת רחל. ההסתברות שלפחות אחד מבין רחל ובני ינחש נכונה את המספר הזוכה היא:

$$\left(1 - \frac{1}{N}\right)^2 \quad (\text{א}) \qquad \frac{2}{N} \quad (\text{ב}) \qquad \frac{2}{N} - \frac{1}{N^2} \quad (\text{ג})$$

8. נניח כי רחל ובני הם המשתתפים היחידים בהגרלה, וכל אחד מהם בוחר מספר בין 1 ל- $N$  על פי התפלגות אחידה באופן בלתי תלוי בשני. תוחלת הרווח של רחל היא:

$$\frac{M}{N} \left(1 - \frac{1}{2N}\right) \quad (\text{א}) \qquad \frac{M}{N} \left(1 - \frac{1}{N}\right) \quad (\text{ב}) \qquad M - \frac{M}{2N} \quad (\text{ג})$$

9. נניח כי רחל ובני מסכימים ביניהם כי רחל תבחר במספר 1, בני יבחר במספר 2, והם יתחלקו ברווחים שווה בשווה. בהנחה שרחל ובני הם המשתתפים היחידים בהגרלה, תוחלת הרווח של רחל היא:

(א) אין מספיק נתונים כדי לענות על השאלה.

(ב) גדולה יותר מאשר בשאלה 8.

(ג) קטנה יותר מאשר בשאלה 8.

10. אנשים,  $n$  ביניהם רחל, משתתפים בהגרלה, וכל אחד מהם בוחר באופן בלתי תלוי את ההימור שלו על פי התפלגות אחידה על הקבוצה  $\{1, 2, \dots, N\}$ . יהי  $X$  מספר הזוכים, ויהי  $A$  המאורע שרחל זוכה. ההתפלגות המותנית של  $X$  בהינתן  $A$  היא:

$$X|_A \sim B\left(n, \frac{1}{N}\right) \quad (\text{א})$$

$$X|_A \sim B\left(n-1, \frac{1}{N}\right) \quad (\text{ב})$$

$$X-1|_A \sim B\left(n-1, \frac{1}{N-1}\right) \quad (\text{ג})$$

11. בהנחות של שאלה 10, תוחלת הרווח של רחל (ללא התניה במאורע  $A$ ) היא:

$$\frac{M}{nN} \quad (\text{א}) \qquad \frac{M}{N} \left(1 - \frac{n-1}{2N}\right) \quad (\text{ב}) \qquad \frac{M}{n} \left(1 - \left(1 - \frac{1}{N}\right)^n\right) \quad (\text{ג})$$

### סוגיה 3

מטילים קוביה הוגנת 9 פעמים, מקבלים משתנים מקריים ב"ת ש"ה  $X_1, X_2, \dots, X_9$ , בעלי התפלגות אחידה ב- $\{1, 2, \dots, 6\}$ . נגדיר הצלחה בניסוי ה- $k$  ( $k = 2, \dots, 9$ ) ע"י אי-שויון

$$X_k < 2X_1 - 3$$

יהי  $N$  מספר הצלחות בין 8 הניסויים.

12. מצא את ההתפלגות המותנית של  $N$  בהנתן  $X_1 = 3$ .

$$B\left(8, \frac{1}{3}\right) \quad (\text{א}) \qquad U(0, 8) \quad (\text{ב}) \qquad H(3; 2, 4) \quad (\text{ג})$$

13. מצא את התוחלת  $\mathbb{E}(N)$ .

(א)  $\frac{8}{3}$  (ב)  $\frac{8}{3}(X_1 - 2)$  (ג) 4

14. כמה ערכים שונים מקבל המ"מ  $\text{Var}(N | X_1)$  (שונות מותנית)?  
 (א) 6 (ב) 3 (ג) 4

15. מצא את יחס ההסתברויות המותנות  
 $\frac{\mathbb{P}(X_1 = 3 | N = 3)}{\mathbb{P}(X_1 = 4 | N = 3)}$

רמז: נוסחת ביז.

(א)  $\frac{17}{6}$  (ב) 1 (ג) 4

16. מצא את ההסתברות המותנית  $\mathbb{P}(X_1 = 3 | N = 3)$ .

(א)  $\frac{1}{2}$  (ב)  $\frac{17}{27}$  (ג)  $\frac{4}{5}$

17. מטילים את הקוביה פעם עשירית. מצא את ההסתברות המותנית להצלחה,

$\mathbb{P}(X_{10} < 2X_1 - 3 | N = 3)$

(א)  $\frac{1}{2}$  (ב)  $\frac{1}{3}$  (ג)  $\frac{2}{5}$

#### סוגיה 4

מטילים מטבע הוגן עד שמתקבל 100 פעמים "עץ".  
 יהי  $X$  מספר הפעמים שמתקבל "פלי".

18. מצא חסם עליון להסתברות ש-  $X \geq 1000$ .

(א)  $\mathbb{P}(X \geq 1000) \leq \frac{1}{8100}$  לפי אי-שוויון Chebyshev.

(ב)  $\mathbb{P}(X \geq 1000) = 0$ , מפני ש-  $X$  מקבל ערכים  $0, 1, \dots, 100$  בלבד.

(ג)  $\mathbb{P}(X \geq 1000) \leq 0.1$  לפי אי-שוויון Markov.

19. מצא קירוב נורמלי להסתברות ש-  $X \geq 80$ .

(א)  $\mathbb{P}(X \geq 80) \approx 0.84$

(ב)  $\mathbb{P}(X \geq 80) \approx 0.98$

(ג)  $\mathbb{P}(X \geq 80) \approx 0.92$

## רשימת נוסחאות

Var ( X )	E ( X )	P ( X = k )	ההתפלגות	
$np(1 - p)$	$np$	$\binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}$	$B(n, p)$	בינומית
$\lambda$	$\lambda$	$\frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$	$P(\lambda)$	פואסון
$\frac{1-p}{p^2}$	$\frac{1}{p}$	$p(1-p)^{k-1}$	$G(p)$	גיאומטרית
$\frac{n^2 - 1}{12}$	$\frac{n + 1}{2}$	$\frac{1}{n}$	$U(n)$	אחידה ב- $\{1, \dots, n\}$
$n \frac{1-p}{p^2}$	$\frac{n}{p}$	$\binom{k-1}{n-1} p^n (1-p)^{k-n}$	$NB(n, p)$	בינומית-שלילית
$n \frac{RW}{(R+W)^2} \left(1 - \frac{n-1}{R+W-1}\right)$	$n \frac{R}{R+W}$	$\frac{\binom{R}{k} \binom{W}{n-k}}{\binom{R+W}{n}}$	$H(n; R, W)$	היפרגיאומטרית

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots \quad (-1 < x < 1)$$

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \dots$$

$$\mathbb{E}(Y) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(Y | X))$$

$$\text{Var}(Y) = \mathbb{E}(\text{Var}(Y | X)) + \text{Var}(\mathbb{E}(Y | X))$$

$$\hat{Y} = \rho \frac{\sigma_Y}{\sigma_X} (X - \mathbb{E}(X)) + \mathbb{E}(Y)$$

$\lambda$	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
$e^{-\lambda}$	0.905	0.819	0.741	0.670	0.607	0.549	0.497	0.449	0.407

$\lambda$	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$e^{-\lambda}$	0.368	0.135	0.0498	0.0183	0.0067	0.0025	0.0009	0.0003	0.0001