

סמסטר א', מועד א', תשס"ט
תאריך הבחינה: 17.02.2009
מספר קורס: 0365-1102

מספר מחברת _____
מספר ת.ז. _____

בחינה במבוא להסתברות

המורים: פרופ' יצחק מלכסון, פרופ' בוריס צירלסון

משך הבחינה: 3 שעות.

מותר להשתמש בדף סכום אישי, ובמחשב כיס.

השאלון מורכב מ-20 שאלות המבוססות על 4 סוגיות. רצוי לענות על כולן.

לכל שאלה ניתנות 3 תשובות. סמן בטבלת התשובות את התשובה הנראית לך נכונה.

באם כל התשובות נראות לך לא נכונות סמן (ד).

סימון התשובה הנכונה במקום המתאים בטבלה שבתחתית עמוד זה מזכה ב-6 נקודות

זכות. סימון תשובה לא נכונה נושא שתי נקודות חובה.

הנבחן רשאי לסמן יותר מתשובה אחת באותה שאלה.

<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>

0 -2 6 -2 -2 -4 4 0

דוגמה:

סה"כ הנקודות האפשרי הוא 120.

לעזרתך מצורפת רשימת נוסחאות.

בהצלחה!

	1	2	3	4	5	6	7
א	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
ב	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
ג	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
ד	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

	8	9	10
א	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
ב	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
ג	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
ד	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

	11	12	13	14	15	16
א	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
ב	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
ג	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
ד	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

	17	18	19	20
א	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
ב	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
ג	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
ד	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

סוגיה 1

יהי X מתפלג פואסון עם פרמטר λ .

1. עבור $\lambda = 1$ חשב $\mathbb{E}(X | X \geq 1)$.

(א) $\frac{e}{e-1}$ (ב) $\frac{1}{e-2}$ (ג) 2

2. עבור $\lambda = 1$ חשב $\text{Var}(X | X \geq 1)$.

(א) $\frac{e-2}{e-1}$ (ב) $\frac{e}{e-1}$ (ג) $\frac{e(e-2)}{(e-1)^2}$

3. עבור $\lambda = \frac{1}{2}$ חשב $\mathbb{E}(X!)$.

(א) $\frac{\sqrt{e}}{4}$ (ב) $\frac{2}{e}$ (ג) $\frac{1}{2}$

4. עבור $\lambda = 2$ חשב $\mathbb{E}(2^X)$.

(א) e^2 (ב) e (ג) 4

5. עבור $\lambda = 1$ חשב $\text{Cov}(2^X, 3^X)$.

(א) $e^5 - e^3$ (ב) e^5 (ג) $e^3 - e^5$

6. עבור $\lambda = 1$ חשב את מקדם המתאם בין 2^X לבין 3^X .

(א) $\sqrt{\frac{e^2-1}{e^2+1}}$ (ב) $\sqrt{\frac{e+1}{e^2+1}}$ (ג) 1

7. עבור $\lambda = 10000$ חשב בקירוב $p = \mathbb{P}(X \geq 10150)$.

(א) $0.06 < p < 0.08$ (ב) $0.04 < p < 0.06$ (ג) $0.03 < p < 0.04$

סוגיה 2

יהיו X_1, X_2, \dots, X_{20} משתנים מקריים בלתי תלויים ושווי התפלגות המתפלגים אחיד

בקבוצה $\{1, 2, 3, 4\}$. נגדיר מאורעות

$$A: X_1 \leq X_2 \leq \dots \leq X_{20}$$

B : כל אחד מהמספרים 1, 2, 3, 4 מופיע בסידרה X_1, X_2, \dots, X_{20} (לפחות פעם).

8. חשב $\mathbb{P}(A)$.

(א) $2^{-40} \binom{23}{3}$ (ב) $2^{-57} 5^{19}$ (ג) $2^{-40} \binom{19}{3}$

9. חשב $\mathbb{P}(A | X_8 = X_{10} = 2)$.

(א) $2^{-36} \binom{23}{3}$ (ב) $2^{-32} \cdot 33$ (ג) $2^{-53} \cdot 5^{19}$

10. חשב $\mathbb{P}(A \cap B)$.

(א) 2^{-27} (ב) $2^{-52} \cdot 3^{-1} \cdot 5^{19}$ (ג) $2^{-40} \binom{19}{3}$

סוגיה 3

11. יהיו X, Y משתנים מקריים בלתי תלויים ושווי התפלגות עם $\mathbb{E}(X) = 3$ ו-

$\text{Var}(X) = 4$. חשב $\mathbb{E}((X - Y)^2)$.

(א) אין מספיק נתונים כדי לענות על השאלה. (ב) 26 (ג) 4

12. יהיו X, Y משתנים מקריים בלתי תלויים ושווי התפלגות המתפלגים אחד בקבוצה

$\{1, 2, \dots, 8\}$. חשב $\mathbb{E}((X - Y)^2)$.

(א) 10.5 (ב) 5.25 (ג) $\frac{32}{3}$

13. בנתוני שאלה 12, חשב $\mathbb{E}((X - Y)^2 | X \neq Y)$.

(א) 12 (ב) 10.5 (ג) 11

14. תהי (X_1, X_2, \dots, X_8) תמורה מקרית של $(1, 2, \dots, 8)$, ויהי

$S = (X_1 - X_2)^2 + (X_2 - X_3)^2 + \dots + (X_7 - X_8)^2$. חשב $\mathbb{E}(S)$.

(א) 73.5 (ב) אין מספיק נתונים כדי לענות על השאלה. (ג) 84

15. בנתוני שאלה 14, חשב $\mathbb{E}(S | X_8 = 8)$.

(א) 73.5 (ב) 76 (ג) 48

16. יהיו (X_1, X_2, \dots, X_8) ו- (Y_1, Y_2, \dots, Y_8) שתי תמורות מקריות בלתי תלויות של

$(1, 2, \dots, 8)$, ויהי $R = (X_1 - Y_1)^2 + (X_2 - Y_2)^2 + \dots + (X_8 - Y_8)^2$. חשב $\mathbb{E}(R)$.

(א) 84 (ב) 48 (ג) 73.5

סוגיה 4

17. יהי X מתפלג גיאומטרית עם פרמטר $p = \frac{1}{2}$. נגדיר מאורעות

A : X הוא מספר זוגי;

B : X הוא מספר אי-זוגי.

ההתפלגות המותנית של $X/2$ בהנתן A היא

(א) גיאומטרית (ב) היפרגיאומטרית (ג) בינומית שלילית

18. בנתוני שאלה 17, חשב $\mathbb{E}(X|A) - \mathbb{E}(X|B)$.

(א) $\frac{1}{2}$ (ב) 0 (ג) 1

19. יהי X מתפלג בינומית שלילית עם פרמטרים $n = 9000$ ו- $p = \frac{1}{10}$. חשב בקירוב

$a = \mathbb{P}(X \leq 88200)$

(א) $0.03 < a < 0.04$ (ב) $0.04 < a < 0.06$ (ג) $0.06 < a < 0.08$

20. יהיו X, Y משתנים מקריים בלתי תלויים ושווי התפלגות, המתפלגים בינומית עם פרמטרים $n = 24$ ו- $p = \frac{1}{4}$. תן חסם מלעיל קטן כפי שתוכל להסתברות

$a = \mathbb{P}(X \geq Y + 9)$

(א) $a \leq \frac{1}{18}$ (ב) $a \leq \frac{2}{5}$ (ג) $a \leq \frac{1}{9}$

רשימת נוסחאות

Var (X)	E (X)	P (X = k)	ההתפלגות	
$np(1 - p)$	np	$\binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}$	$B(n, p)$	בינומית
λ	λ	$\frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$	$P(\lambda)$	פואסון
$\frac{1-p}{p^2}$	$\frac{1}{p}$	$p(1-p)^{k-1}$	$G(p)$	גיאומטרית
$\frac{n^2 - 1}{12}$	$\frac{n + 1}{2}$	$\frac{1}{n}$	$U(n)$	אחידה ב- $\{1, \dots, n\}$
$n \frac{1-p}{p^2}$	$\frac{n}{p}$	$\binom{k-1}{n-1} p^n (1-p)^{k-n}$	$NB(n, p)$	בינומית-שלילית
$n \frac{RW}{(R+W)^2} \left(1 - \frac{n-1}{R+W-1}\right)$	$n \frac{R}{R+W}$	$\frac{\binom{R}{k} \binom{W}{n-k}}{\binom{R+W}{n}}$	$H(n; R, W)$	היפרגיאומטרית

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots \quad (-1 < x < 1)$$

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \dots$$

$$\mathbb{E}(Y) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(Y | X))$$

$$\text{Var}(Y) = \mathbb{E}(\text{Var}(Y | X)) + \text{Var}(\mathbb{E}(Y | X))$$

$$\hat{Y} = \rho \frac{\sigma_Y}{\sigma_X} (X - \mathbb{E}(X)) + \mathbb{E}(Y)$$

λ	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
$e^{-\lambda}$	0.905	0.819	0.741	0.670	0.607	0.549	0.497	0.449	0.407

λ	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$e^{-\lambda}$	0.368	0.135	0.0498	0.0183	0.0067	0.0025	0.0009	0.0003	0.0001