

סמסטר א', מועד ב', תשס"ח  
 תאריך הבחינה: 30.05.2008  
 מספר קורס: 0365-1102

מספר מחברת \_\_\_\_\_  
 מספר ת.ז. \_\_\_\_\_

### בחינה במבוא להסתברות

המורים: פרופ' אהוד לרר, פרופ' בוריס צירלסון

משך הבחינה: 3 שעות.  
 מותר להשתמש בדף סכום אישי, ובמחשב כיס.  
 השאלון מורכב מ-20 שאלות המבוססות על 3 סוגיות. רצוי לענות על כולן.  
 לכל שאלה ניתנות 3 תשובות. סמן בטבלת התשובות את התשובה הנראית לך נכונה.  
 באם כל התשובות נראות לך לא נכונות סמן (ד).  
 סימון התשובה הנכונה במקום המתאים בטבלה שבתחתית עמוד זה מזכה ב-6 נקודות  
 זכות. סימון תשובה לא נכונה נושא שתי נקודות חובה.  
 הנבחן רשאי לסמן יותר מתשובה אחת באותה שאלה.

<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>

דוגמה:

0   -2   6   -2   -2   -4   4   0

סה"כ הנקודות האפשרי הוא 120.  
 לעזרתך מצורפת רשימת נוסחאות.

בהצלחה!

	1   2   3   4		5   6   7   8										
א	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	א	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	א	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
ב	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	ב	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	ב	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
ג	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	ג	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	ג	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
ד	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	ד	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	ד	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
	12   13   14   15		16   17   18   19   20										
א	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	א	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>				
ב	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	ב	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>				
ג	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	ג	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>				
ד	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	ד	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>				

## סוגיה 1

יהיו  $X_1, X_2, \dots$  מ"מ ב"ת ש"ה,  $\mathbb{P}(X_1 = 0) = \frac{2}{3}$ ,  $\mathbb{P}(X_1 = 1) = \frac{1}{3}$ . נגדיר את המאורעות הבאים:

$$A_2 = \{X_1 = X_2\},$$

$$A_3 = \{X_1 = X_2 = X_3\},$$

...

$$A_n = \{X_1 = X_2 = \dots = X_n\}.$$

1. ההסתברות המותנה  $\mathbb{P}(A_2 | X_1 = 1)$  היא

(א)  $\frac{1}{5}$       (ב)  $\frac{5}{9}$       (ג)  $\frac{1}{3}$

2. ההסתברות המותנה  $\mathbb{P}(X_1 = 1 | A_2)$  היא

(א)  $\frac{5}{9}$       (ב)  $\frac{1}{3}$       (ג)  $\frac{1}{5}$

3. ההסתברות המותנה  $\mathbb{P}(A_3 | A_2)$  היא

(א)  $\frac{3}{5}$       (ב)  $\frac{5}{9}$       (ג)  $\frac{2}{3}$

4. הגבול  $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(A_{n+1} | A_n)$  הוא

(א)  $\frac{5}{9}$       (ב)  $\frac{2}{3}$       (ג)  $\frac{3}{5}$

## סוגיה 2

יהיו  $X_1, X_2, \dots, X_{10}$  מ"מ ב"ת ש"ה,  $\mathbb{E}(X_1^2) < \infty$ . נגדיר את המאורע

$$A = \{X_1 = X_2\}.$$

5. הטענה  $\mathbb{E}(X_1 + X_2 | A) = \mathbb{E}(X_1 + X_2)$

(א) נכונה תמיד.

(ב) נכונה אם  $X_1$  בעל התפלגות אחידה, אך (ג) לא נכון.

(ג) נכונה אם  $X_1$  בעל התפלגות גיאומטרית, אך (ב) לא נכון.

6. הטענה  $\mathbb{E}(X_1 + \dots + X_{10} | A) = \mathbb{E}(X_1 + \dots + X_{10})$

(א) נכונה תמיד.

(ב) נכונה אם  $X_1$  בעל התפלגות אחידה, אך (ג) לא נכון.  
 (ג) נכונה אם  $X_1$  בעל התפלגות גיאומטרית, אך (ב) לא נכון.

.....  
 7. הטענה  $\text{Var}(X_1 + X_2 | A) = \text{Var}(X_1 + X_2)$  (א) נכונה אם  $X_1$  בעל התפלגות גיאומטרית, אך (ב) לא נכון.  
 (ב) נכונה אם  $X_1$  בעל התפלגות אחידה, אך (א) לא נכון.  
 (ג) נכונה תמיד.

.....  
 8. הטענה  $\text{Var}(X_1 + \dots + X_{10} | A) = \text{Var}(X_1 + \dots + X_{10})$  (א) נכונה אם  $X_1$  בעל התפלגות גיאומטרית, אך (ג) לא נכון.  
 (ב) נכונה תמיד.  
 (ג) נכונה אם  $X_1$  בעל התפלגות אחידה, אך (א) לא נכון.

### סוגיה 3

יהיו  $X, Y$  מ"מ ב"ת. נגדיר את המאורע

$$A = \{X = Y\}.$$

9. אם  $X \sim B(20, 0.7)$  ו-  $Y \sim B(30, 0.3)$ , אז ההתפלגות המותנה של  $X$  בהנתן  $A$  היא

(א) היפרגאומטרית (ב) בינומית (ג) אחידה

.....  
 10. אם  $X \sim G(0.7)$  ו-  $Y \sim G(0.3)$ , אז ההתפלגות המותנה של  $X$  בהנתן  $A$  היא  
 (א) בינומית שלילית.  
 (ב) אין מספיק נתונים כדי לדעת.  
 (ג) גיאומטרית.

.....  
 11. מהי ההתפלגות של  $Y$ , אם  $X \sim G(0.7)$  וההתפלגות המותנה של  $X$  בהנתן  $A$  היא  $G(0.3)$ ?  
 (א) בינומית שלילית.  
 (ב) גיאומטרית.  
 (ג) לא קיימים  $X, Y$  כאלה.

#### סוגיה 4

יהיו  $X, Y$  מ"מ ב"ת עם תוחלת ושוונות סופיות. נסמן

$$Z = X + Y, \quad W = X - Y.$$

12.

- (א)  $Z$  ו- $W$  הם בלתי מתואמים אם ורק אם  $\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(Y)$ .  
(ב)  $Z$  ו- $W$  הם בלתי מתואמים אם ורק אם  $\text{Var}(X) = \text{Var}(Y)$ .  
(ג)  $Z$  ו- $W$  הם תמיד בלתי מתואמים.

13.  $X \sim B(6, \frac{1}{2})$ ,  $Y$  משתנה אחיד על פני  $1, 2, \dots, 6$  (קוביה). נסמן ב- $r$  את מקדם

המתאם בין  $Z$  ו- $W$ .

- (א)  $r > \frac{1}{2}$  (ב)  $r < -\frac{1}{2}$  (ג)  $r = 0$

14.  $X$  ו- $Y$  מקבלים ערכים 0 או 1 בהסתברות  $\frac{1}{2}$ .

- (א)  $Z$  ו- $W$  בעלי מתאם חיובי.  
(ב)  $Z$  ו- $W$  בעלי מתאם שלילי.  
(ג)  $Z$  ו- $W$  בלתי תלויים.

15. השונות של  $ZW$ :

- (א) עשויה להיות שווה ל-0 אבל תמיד סופית.  
(ב) תמיד חיובית ממש.  
(ג) עשויה להיות אינסופית.

## סוגיה 5

מטילים 100 מטבעות הוגנים שעליהם רשומים 0 ו-1. מקבלים 100 מ"מ:  $X_1, X_2, \dots, X_{100}$ , כאשר  $X_i$  היא תוצאת ההטלה של המטבע ה- $i$  (0 או 1). לאחר מכן מסדרים את המטבעות בסדר אקראי מבלי להפוך את הצדדים. מקבלים 100 מ"מ חדשים:  $Y_1, Y_2, \dots, Y_{100}$ . נגדיר בנוסף את המ"מ

$$X = \sum_{i=1}^{100} X_i, \quad Z = \sum_{i=1}^{100} X_i Y_i.$$

---

	ההתפלגות של $X$ היא	
(א) אחידה	(ב) בינומית	(ג) היפרגאומטרית
.....		
16. ההתפלגות המותנה של $Z$ בהנתן $X = 60$ היא		
(א) בינומית	(ב) אחידה	(ג) היפרגאומטרית
.....		
17. ההתפלגות המותנה של $X$ בהנתן $X - Z = 0$ היא		
(א) אחידה	(ב) בינומית	(ג) היפרגאומטרית
.....		
18. ההתפלגות המותנה של $X$ בהנתן $X - Z = 1$ היא		
(א) בינומית	(ב) היפרגאומטרית	(ג) אחידה
.....		
19. התוחלת המותנה של $X$ בהנתן $X - Z = 10$ שווה ל-		
(א) 50	(ב) 60	(ג) 40
.....		

---



---

### רשימת נוסחאות

Var ( X )	E ( X )	P ( X = k )	ההתפלגות	
$np(1 - p)$	$np$	$\binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}$	$B(n, p)$	בינומית
$\lambda$	$\lambda$	$\frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$	$P(\lambda)$	פואסון
$\frac{1-p}{p^2}$	$\frac{1}{p}$	$p(1-p)^{k-1}$	$G(p)$	גיאומטרית
$\frac{n^2 - 1}{12}$	$\frac{n + 1}{2}$	$\frac{1}{n}$	$U(n)$	אחידה ב- $\{1, \dots, n\}$
$n \frac{1-p}{p^2}$	$\frac{n}{p}$	$\binom{k-1}{n-1} p^n (1-p)^{k-n}$	$NB(n, p)$	בינומית-שלילית
$n \frac{RW}{(R+W)^2} \left(1 - \frac{n-1}{R+W-1}\right)$	$n \frac{R}{R+W}$	$\frac{\binom{R}{k} \binom{W}{n-k}}{\binom{R+W}{n}}$	$H(n; R, W)$	היפרגיאומטרית

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots \quad (-1 < x < 1)$$

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \dots$$

$$\mathbb{E}(Y) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(Y | X))$$

$$\text{Var}(Y) = \mathbb{E}(\text{Var}(Y | X)) + \text{Var}(\mathbb{E}(Y | X))$$

$$\hat{Y} = \rho \frac{\sigma_Y}{\sigma_X} (X - \mathbb{E}(X)) + \mathbb{E}(Y)$$

$\lambda$	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
$e^{-\lambda}$	0.905	0.819	0.741	0.670	0.607	0.549	0.497	0.449	0.407

$\lambda$	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$e^{-\lambda}$	0.368	0.135	0.0498	0.0183	0.0067	0.0025	0.0009	0.0003	0.0001