מספר מחברת_____

מספר ת.ז._____

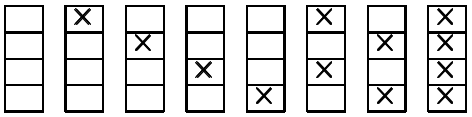
סמסטר א', מועד א', תשס"ז
תאריך הבחינה: 13.02.2007
מספר קורס: 0365-1102

בחינה במבוא להסתברות

המורים: פרופ' אילון סולן, פרופ' בוריס צירלסון

משך הבחינה: 3 שעות.
מותר להשתמש בדף סכום אישי, ובמחשב כיס.
השאלון מורכב מ-20 שאלות המבוססות על 4 סוגיות. רצוי לענות על כולן.
לכל שאלה ניתנות 3 תשובות. סמן בטבלת התשובות את התשובה הנראית לך נכונה.
באם כל התשובות נראות לך לא נכונות סמן (ד).
סימון התשובה הנכונה במקום המתאים בטבלה שבתחתית עמוד זה מזכה ב-6 נקודות זכות. סימון תשובה לא נכונה נושא שתי נקודות חובה.
הנבחן רשאי לסמן יותר מתשובה אחת באותה שאלה.

דוגמה:



סה"כ הנקודות האפשרי הוא 120.
לעזרתך מצורפת רשימת נוסחאות וטבלת ההתפלגות הנורמלית.

בהצלחה!

	1	2	3	4	5	6
א						
ב						
ג						
ד						

	7	8	9	10	11
א					
ב					
ג					
ד					

	12	13	14	15	16
א					
ב					
ג					
ד					

	17	18	19	20
א				
ב				
ג				
ד				

סוגיה 1

בהגרלת הלוטו של מדינת כנען נבחר באקראי (על פי התפלגות אחידה) מספר שלם בין 1 ל- N. כל משתתף זכאי לנחש מספר יחיד, והפרס בסך M שקלים מחולק שווה בשווה בין כל הזוכים.

---

1. אבי בוחר את הניחוש שלו על פי התפלגות אחידה על הקבוצה $\{1,2,\ldots,N\}$. ההסתברות שאבי ינחש נכונה את המספר הזוכה היא:

(א) $\frac{1}{N}$ (ב) $\frac{2}{N+1}$ (ג) $\frac{1}{N^2}$

.....

2. בני בוחר גם הוא את הניחוש על פי התפלגות אחידה על הקבוצה $\{1,2,\ldots,N\}$, ובאופן בלתי תלוי באבי. ההסתברות שלפחות אחד מבין אבי ובני ינחש נכונה את המספר הזוכה היא:

(א) $\frac{2}{N}$ (ב) $\left(1-\frac{1}{N}\right)^2$ (ג) $\frac{2}{N}-\frac{1}{N^2}$

.....

3. נניח כי אבי ובני הם המשתתפים היחידים בהגרלה, וכל אחד מהם בוחר מספר בין 1 ל- N על פי התפלגות אחידה באופן בלתי תלוי בשני. תוחלת הרווח של אבי היא:

(א) $\frac{M}{N}\left(1-\frac{1}{2N}\right)$ (ב) $M-\frac{M}{2N}$ (ג) $\frac{M}{N}\left(1-\frac{1}{N}\right)$

.....

4. נניח כי אבי ובני מסכימים ביניהם כי אבי יבחר במספר 1, בני יבחר במספר 2, והם יתחלקו ברווחים שווה בשווה. בהנחה שאבי ובני הם המשתתפים היחידים בהגרלה, תוחלת הרווח של אבי היא:

(א) קטנה יותר מאשר בשאלה 3.

(ב) גדולה יותר מאשר בשאלה 3.

(ג) אין מספיק נתונים כדי לענות על השאלה.

.....

5. n אנשים, ביניהם אבי, משתתפים בהגרלה, וכל אחד מהם בוחר את הניחוש שלו על פי התפלגות אחידה על הקבוצה $\{1,2,\ldots,N\}$ באופן בלתי תלוי באחרים. יהי X מספר המנחשים נכונה, ויהי A המאורע שאבי ניחש נכונה. ההתפלגות המותנה של X בהינתן A היא:

(א) $X|_A \sim B\left(n,\frac{1}{N}\right)$.

(ב) $X|_A \sim B\left(n-1,\frac{1}{N}\right)$.

(ג) $X-1|_A \sim B\left(n-1,\frac{1}{N-1}\right)$.

.....

6. בהנחות של שאלה 5, תוחלת הרווח של אבי (ללא התניה במאורע A) היא:

(א) $\frac{M}{N}\left(1-\frac{n-1}{2N}\right)$ (ב) $\frac{M}{nN}$ (ג) $\frac{M}{n}\left(1-\left(1-\frac{1}{N}\right)^n\right)$

סוגיה 2

בכל יום יוצא משה למדבר ומכה פעם אחת בסלע. בהסתברות $\frac{1}{3}$ יוצאים מים מהסלע, ובהסתברות $\frac{2}{3}$ לא יוצאים מים מהסלע.

כאשר השמים מעוננים, ההסתברות שיצאו מים מהסלע כאשר משה מכה בו היא $\frac{1}{4}$.

---

7. ההסתברות שמים יצאו מהסלע כאשר השמים אינם מעוננים היא:
(א) $\frac{5}{12}$.
(ב) $\frac{1}{3}$.
(ג) אין מספיק נתונים כדי לענות על השאלה.

בכל יום אהרון מטיל קוביה הוגנת. אם תוצאת ההטלה היא 1 הוא יוצא עם משה למדבר. אם התוצאה שונה מ- 1 (כלומר, $2,3,4,5,6$), הוא נשאר באוהלו. ההסתברות שמים יצאו מהסלע כאשר אהרון מתלווה למשה היא $\frac{1}{5}$.

---

8. ההסתברות שמים יצאו מהסלע כאשר אהרון אינו מתלווה אל משה היא:
(א) $\frac{15}{16}$.
(ב) $\frac{9}{25}$.
(ג) אין מספיק נתונים כדי לענות על השאלה.

.....

9. ההסתברות המותנה שאהרון התלווה אל משה אם יודעים שיצאו מים מהסלע היא:
(א) $\frac{1}{10}$.
(ב) $\frac{1}{4}$.
(ג) אין מספיק נתונים כדי לענות על השאלה.

.....

10. ביום מסויים משה היכה בסלע ויצאו ממנו מים. ההסתברות המותנה שהשמים ביום זה היו מעוננים היא:
(א) קטנה מההסתברות המותנה שאהרון התלווה אל משה.
(ב) גדולה מההסתברות המותנה שאהרון התלווה אל משה.
(ג) אין מספיק נתונים כדי לענות על השאלה.

.....

11. יהי X מספר הפעמים שיצאו מים מהסלע בשנה האחרונה (364 יום למעט יום כיפור). לפי משפט הגבול המרכזי, ההסתברות p ש- X נמצא בין 110 ו- 140 היא:
(א) $0.7 < p < 0.8$ (ב) $p < 0.6$ (ג) $0.95 < p < 0.98$

סוגיה 3

צבע עיניו של אדם נקבע על פי זוג גנים - את האחד הוא מקבל מאימו ואת השני מאביו. הגן הקובע את צבע העין יכול להופיע בשתי תצורות (אללים, alleles) - D או L. כך, ניתן לאפיין כל אדם על סמך תצורות שני גני העיניים שלו: DD , DL , LD , LL. כאמור, כל ילד מקבל גן אחד מאביו וגן אחד מאימו; כל אחד משני הגנים של ההורה עובר לילד בהסתברות שווה, ובאופן בלתי תלוי בגן אותו קיבל מההורה השני.
אם תצורת הגנים של האדם היא LL , לאדם יהיו עיניים בהירות. אחרת יהיו לאדם עיניים כהות.
התפלגות הגנים באוכלוסיה אחידה: כל אחת מארבע התצורות מופיעה ברבע מהאוכלוסיה. תחת ההנחה שבחירת בן זוג אינה תלויה בצבע עיניו, במשפחה מקרית הסיכוי שלאם (או לאב) תהיה כל אחת מארבע התצורות היא $\frac{1}{4}$. נניח עוד כי צבע עיני ההורים אינו משפיע על מספר הילדים שיהיו להם.
אנו מגרילים משפחה מסויימת הכוללת אב, אם ושני ילדים. נגדיר:
M : המאורע שלאם יש עיניים כהות.
F : המאורע שלאב יש עיניים כהות.
C_1 : המאורע שלילד הבכור יש עיניים כהות.
C_2 : המאורע שלילד הצעיר יש עיניים כהות.

12.
(א) $\mathbb{P}\left(C_1\right) = \mathbb{P}\left(M\right)$.
(ב) $\mathbb{P}\left(C_1\right) < \mathbb{P}\left(M\right)$.
(ג) $\mathbb{P}\left(C_1\right) > \mathbb{P}\left(M\right)$.

.....

13. (F^c הוא המאורע המשלים של F .) ההסתברות המותנה $\mathbb{P}\left(C_1 \,\middle|\, M \cap F^c\right)$ שווה:
(א) $\frac{3}{4}$ (ב) $\frac{8}{9}$ (ג) $\frac{2}{3}$

.....

14. ההסתברות המותנה $\mathbb{P}\left(C_1 \cap C_2 \,\middle|\, M \cap F^c\right)$ שווה:
(א) $\frac{2}{3}$ (ב) $\frac{3}{4}$ (ג) $\frac{4}{9}$

.....

15. ההסתברות המותנה $\mathbb{P}\left(C_1 \,\middle|\, M \cap F\right)$ שווה:
(א) $\frac{2}{3}$ (ב) $\frac{3}{4}$ (ג) $\frac{8}{9}$

.....

16. ההסתברות המותנה $\mathbb{P}\left(M \cap F \,\middle|\, C_1\right)$ שווה:
(א) $\frac{1}{2}$ (ב) $\frac{8}{9}$ (ג) $\frac{2}{3}$

סוגיה 4

מספר המעילות N שמבצע פקיד בנק סורר עד שהוא נתפס מפולג גיאומטרית עם פרמטר p. הסכום Y_k אותו הפקיד גונב במעילה מספר k מפולג אחיד בקבוצה $\{1000, 1001, 1002, \ldots, 1000 + 1000k\}$. הסכום הממוצע למעילה אותו גנב הפקיד עד שנתפס הוא:

$$X = \frac{Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_N}{N}.$$

---

17. **התוחלת המותנה** $\mathbb{E}\left(X \,\middle|\, N < 3\right)$ **היא:**

(א) $1750 - \frac{250}{2-p}$ (ב) $1500 - \frac{250}{p}$ (ג) $1250 + \frac{250}{2-p}$

18. **התוחלת** $\mathbb{E}(X)$ **היא:**

(א) $1500 - \frac{250}{p}$ (ב) $1750 - \frac{250}{p}$ (ג) $1250 + \frac{250}{2-p}$

19. **התוחלת המותנה** $\mathbb{E}\left(X \,\middle|\, N \geq 3\right)$ **היא:**

(א) $2250 - \frac{250}{p}$ (ב) $1750 + \frac{250}{p}$ (ג) $1250 + \frac{750}{p}$

20. **השונות המשותפת** $\mathrm{Cov}\left(N, X\right)$ **היא:**

(א) $\frac{250}{p}$ (ב) 0 (ג) $250 \cdot \frac{1-p}{p^2}$

רשימת נוסחאות

ההתפלגות		$\mathbb{P}\left(X=k\right)$	$\mathbb{E}\left(X\right)$	$\mathrm{Var}\left(X\right)$
בינומית	$B(n,p)$	$\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$	np	$np(1-p)$
פואסון	$P(\lambda)$	$\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$	λ	λ
גיאומטרית	$G(p)$	$p(1-p)^{k-1}$	$\frac{1}{p}$	$\frac{1-p}{p^2}$
אחידה ב-$\{1,\ldots,n\}$	$U(n)$	$\frac{1}{n}$	$\frac{n+1}{2}$	$\frac{n^2-1}{12}$
בינומית-שלילית	$NB(n,p)$	$\binom{k-1}{n-1}p^n(1-p)^{k-n}$	$\frac{n}{p}$	$n\frac{1-p}{p^2}$
היפרגיאומטרית	$H(n;R,W)$	$\frac{\binom{R}{k}\binom{W}{n-k}}{\binom{R+W}{n}}$	$n\frac{R}{R+W}$	$n\frac{RW}{(R+W)^2}\left(1-\frac{n-1}{R+W-1}\right)$

$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+x^3+\ldots \quad (-1<x<1)$$

$$e^x=1+x+\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{3!}x^3+\ldots$$

$$\mathbb{E}\left(Y\right)=\mathbb{E}\left(\mathbb{E}\left(Y\,\middle|\,X\right)\right)$$

$$\mathrm{Var}\left(Y\right)=\mathbb{E}\left(\mathrm{Var}\left(Y\,\middle|\,X\right)\right)+\mathrm{Var}\left(\mathbb{E}\left(Y\,\middle|\,X\right)\right)$$

$$\hat{Y}=\rho\frac{\sigma_Y}{\sigma_X}(X-\mathbb{E}\left(X\right))+\mathbb{E}\left(Y\right)$$

λ	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
$e^{-\lambda}$	0.905	0.819	0.741	0.670	0.607	0.549	0.497	0.449	0.407

λ	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$e^{-\lambda}$	0.368	0.135	0.0498	0.0183	0.0067	0.0025	0.0009	0.0003	0.0001