

סמסטר א', מועד ב', תשס"ו  
 תאריך הבחינה: 24.03.2006  
 מספר קורס: 0365-1102

מספר מחברת \_\_\_\_\_  
 מספר ת.ז. \_\_\_\_\_

### בחינה במבוא להסתברות

המורים: פרופ' יצחק מלכסון, פרופ' בוריס צירלסון

משך הבחינה: 3 שעות.  
 מותר להשתמש בדף סכום אישי, ובמחשב כיס.  
 השאלון מורכב מ-20 שאלות המבוססות על 4 סוגיות. רצוי לענות על כולן.  
 לכל שאלה ניתנות 3 תשובות. סמן בטבלת התשובות את התשובה הנראית לך נכונה.  
 באם כל התשובות נראות לך לא נכונות סמן (ד).  
 סימון התשובה הנכונה במקום המתאים בטבלה שבתחתית עמוד זה מזכה ב-6 נקודות  
 זכות. סימון תשובה לא נכונה נושא שתי נקודות חובה.  
 הנבחן רשאי לסמן יותר מתשובה אחת באותה שאלה.

<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>

דוגמה:

סה"כ הנקודות האפשרי הוא 120.  
 לעזרתך מצורפת רשימת נוסחאות וטבלת ההתפלגות הנורמלית.

בהצלחה!

	1	2
א		
ב		
ג		
ד		

	3	4	5	6	7	8	9
א							
ב							
ג							
ד							

	10	11	12	13	14	15
א						
ב						
ג						
ד						

	16	17	18	19	20
א					
ב					
ג					
ד					

## סוגיה 1

דוגמים באקראי וללא החזרה  $n$  קלפים מתוך 13 קלפים ממוספרים מ-1 עד 13. יהי  $X_n$  סכום המספרים הרשומים ב- $n$  הקלפים שבמדגם.

1. מצא את ההסתברות  $\mathbb{P}(X_{12} = 90)$ .

- (א)  $\frac{1}{13}$       (ב) 0      (ג)  $\frac{1}{13!}$

2. מצא את ההסתברות  $\mathbb{P}(X_{11} = 80)$ .

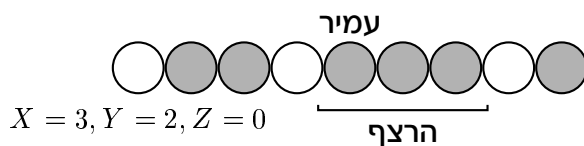
- (א)  $\frac{10}{169}$       (ב)  $\frac{10}{13}$       (ג)  $\frac{5}{78}$

## סוגיה 2

עמיר עומד בטור של חיילים. כל חייל הוא בלונדיני (בסיכוי  $1/4$ ) או ברונטי (בסיכוי  $3/4$ ) ללא תלות באחרים; אבל עמיר הוא ברונטי. הטור הוא אינסופי בשני הכיוונים, ימינה ושמאלה מעמיר.

נתבונן ברצף הברונטים שמכיל את עמיר. אורך הרצף הוא  $X = Y + 1 + Z$  כאשר  $Y$  הוא מספר הברונטים (ברצף) ימינה מעמיר ו- $Z$  הוא מספר הברונטים (ברצף) שמאלה מעמיר.

דוגמה:



3. מצא את ההסתברות  $\mathbb{P}(X = 1)$ .

- (א)  $\frac{1}{16}$       (ב)  $\frac{9}{16}$       (ג)  $\frac{1}{4}$

4. מצא את התוחלת  $\mathbb{E}(X)$ .

- (א)  $\frac{5}{3}$       (ב) 16      (ג) 7

5. מצא את השונות  $\text{Var}(X)$ .

- (א)  $\frac{4}{9}$       (ב) 240      (ג) 24

6. מצא את ההתפלגות של  $X$ .

- (א)  $X \sim P(7)$       (ב)  $X + 1 \sim NB(2, \frac{1}{4})$       (ג)  $X \sim G(\frac{1}{16})$

7. מצא את השונות המשותפת  $\text{Cov}(X, Y - Z)$   
 (א) 12 (ב) -12 (ג) 0

8. מצא את מקדם המתאם בין  $X$  ל- $Y$ .

(א)  $\frac{7}{12\sqrt{2}}$  (ב)  $\frac{1}{\sqrt{2}}$  (ג)  $\frac{1}{2}$

9. מצא את ההסתברות המותנה  $\mathbb{P}(X > 8 | Y = 5)$ .

(א)  $\frac{9}{64}$  (ב)  $\frac{27}{64}$  (ג)  $\frac{3^8}{4^9}$

### סוגיה 3

יהיו  $A_1, A_2, \dots, A_{10}$  עשרה מאורעות כך ש- $\mathbb{P}(A_1) = \dots = \mathbb{P}(A_{10}) = 0.1$ . עבור  $k = 1, 2, \dots, 10$  יהי  $X_k$  האינדיקטור של  $A_k$ , ו- $S_k = X_1 + \dots + X_k$  מספר המאורעות שהתרחשו מבין  $A_1, \dots, A_k$ .

10. מה ניתן לומר על  $S_{10}$ ?

(א)  $S_{10} \sim B(10, 0.1)$  ולכן  $\mathbb{E}(S_{10}) = 1$ ,  $\text{Var}(S_{10}) = 0.9$ .  
 (ב)  $\mathbb{E}(S_{10}) = 1$ , אבל אין מספיק נתונים כדי לחשב את  $\text{Var}(S_{10})$ .  
 (ג)  $\mathbb{E}(S_{10}) = 1$ ,  $\text{Var}(S_{10}) = 0.9$ , אבל  $S_{10}$  לא בהכרח בינומי.

11. הערכים שמקדם המיתאם  $\rho(X_1, X_2)$  יכול לקבל הם:

(א) כל ערך בקטע  $[-\frac{1}{9}, 1]$ .  
 (ב) כל ערך בקטע  $[-1, 1]$ .  
 (ג)  $-\frac{1}{9}$ ,  $0$ ,  $1$  (בלבד).

מעטה והלאה נניח כי קיים מספר  $p$  כך ש- $\mathbb{P}(A_k \cap A_l) = p$  לכל  $k, l$ :  
 $1 \leq k < l \leq 10$ .

12. אם  $p = 0.01$  אז:

(א)  $\mathbb{E}(S_{10}) = 1$ ,  $\text{Var}(S_{10}) = 0.9$ , אבל  $S_{10}$  לא בהכרח בינומי.  
 (ב)  $S_{10} \sim B(10, 0.1)$  ולכן  $\mathbb{E}(S_{10}) = 1$ ,  $\text{Var}(S_{10}) = 0.9$ .  
 (ג)  $\mathbb{E}(S_{10}) = 1$ , אבל אין מספיק נתונים כדי לחשב את  $\text{Var}(S_{10})$ .

13. אם  $p = 0.01$  אז מקדם המיתאם  $\rho(S_5, S_8)$  הוא

(א) אין מספיק נתונים כדי לחשב אותו  
 (ב)  $\sqrt{\frac{5}{8}}$   
 (ג)  $\frac{\sqrt{39}}{8}$

14. אם  $p = 0$  אז מקדם המיתאם  $\rho(S_5, S_8)$  הוא

(א)  $\sqrt{\frac{5}{8}}$  (ב) 0.5 (ג) אין מספיק נתונים כדי לחשב אותו

15. אם  $p = 0.1$  אז מקדם המיתאם  $\rho(S_5, S_8)$  הוא

(א)  $\frac{\sqrt{39}}{8}$  (ב) אין מספיק נתונים כדי לחשב אותו (ג) 1

#### סוגיה 4

כמו בסוגיה 2, אבל כאן גם עמיר הוא בלונדיני (בסיכוי  $1/4$ ) או ברונטי (בסיכוי  $3/4$ ) ללא תלות באחרים; ובהתאמה הרצף (באורך  $X = Y + 1 + Z$ ) המכיל את עמיר הוא רצף של בלונדינים או של ברונטים.

16. מה אפשר לומר על מ"מ  $Y, Z$  ?

(א) תלויים, אך בלתי תלויים בהנתן צבע שיער של עמיר.  
 (ב) בלתי תלויים, אך תלויים בהנתן צבע שיער של עמיר.  
 (ג) בלתי תלויים, וגם בלתי תלויים בהנתן צבע שיער של עמיר.

17. מצא את ההסתברות  $\mathbb{P}(X = 1)$ .

(א)  $\frac{5}{8}$  (ב)  $\frac{5}{16}$  (ג)  $\frac{3}{16}$

18. מצא את התוחלת  $\mathbb{E}(X)$ .

(א)  $\frac{13}{3}$  (ב)  $\frac{26}{3}$  (ג)  $\frac{17}{3}$

19. מצא את השונות המשותפת  $\text{Cov}(Y, Z)$ .

(א)  $\frac{40}{9}$  (ב)  $\frac{4}{3}$  (ג) 0

20. מצא את ערך השכיח של  $Y$ .

(א) 2 (ב) 1 (ג) 0

## רשימת נוסחאות

Var ( X )	E ( X )	P ( X = k )	ההתפלגות	
$np(1 - p)$	$np$	$\binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}$	$B(n, p)$	בינומית
$\lambda$	$\lambda$	$\frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$	$P(\lambda)$	פואסון
$\frac{1-p}{p^2}$	$\frac{1}{p}$	$p(1-p)^{k-1}$	$G(p)$	גיאומטרית
$\frac{n^2 - 1}{12}$	$\frac{n + 1}{2}$	$\frac{1}{n}$	$U(n)$	אחידה ב- $\{1, \dots, n\}$
$n \frac{1-p}{p^2}$	$\frac{n}{p}$	$\binom{k-1}{n-1} p^n (1-p)^{k-n}$	$NB(n, p)$	בינומית-שלילית
$n \frac{RW}{(R+W)^2} \left(1 - \frac{n-1}{R+W-1}\right)$	$n \frac{R}{R+W}$	$\frac{\binom{R}{k} \binom{W}{n-k}}{\binom{R+W}{n}}$	$H(n; R, W)$	היפרגיאומטרית

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots \quad (-1 < x < 1)$$

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \dots$$

$$\mathbb{E}(Y) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(Y | X))$$

$$\text{Var}(Y) = \mathbb{E}(\text{Var}(Y | X)) + \text{Var}(\mathbb{E}(Y | X))$$

$$\hat{Y} = \rho \frac{\sigma_Y}{\sigma_X} (X - \mathbb{E}(X)) + \mathbb{E}(Y)$$

$\lambda$	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
$e^{-\lambda}$	0.905	0.819	0.741	0.670	0.607	0.549	0.497	0.449	0.407

$\lambda$	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$e^{-\lambda}$	0.368	0.135	0.0498	0.0183	0.0067	0.0025	0.0009	0.0003	0.0001