

סמסטר ב', מועד ב', תשס"ה
 תאריך הבחינה: 27.09.2005
 מספר קורס: 0365-1102

מספר התלמיד _____

בחינה במבוא להסתברות

המורה: פרופ' בוריס צירלסון

משך הבחינה: 3 שעות.

מותר להשתמש בדף סכום אישי, ובמחשב כיס.

השאלון מורכב מ-18 שאלות המבוססות על 3 סוגיות. רצוי לענות על כולן.

לכל שאלה ניתנות 3 תשובות. סמן בטבלת התשובות את התשובה הנראית לך נכונה.

באם כל התשובות נראות לך לא נכונות סמן (ד).

סימון התשובה הנכונה במקום המתאים בטבלה שבתחתית עמוד זה מזכה ב-6 נקודות

זכות. סימון תשובה לא נכונה נושא שתי נקודות חובה.

הנבחן רשאי לסמן יותר מתשובה אחת באותה שאלה.

<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>

דוגמה:

0 -2 6 -2 -2 -4 4 0

סה"כ הנקודות האפשרי הוא 108.

לעזרתך מצורפת רשימת נוסחאות.

בהצלחה!

	1	2	3	4	5	6	7
א							
ב							
ג							
ד							

	8	9	10	11	12	13
א						
ב						
ג						
ד						

	14	15	16	17	18
א					
ב					
ג					
ד					

סוגיה 1

מפזרים באופן מקרי n כדורים ב- n כדים (n^n אפשרויות, שווי הסתברות). נגדיר מ"מ:
 X הוא מספר הכדורים בכד הראשון,
 Y הוא מספר הכדורים בכד השני,
 N הוא מספר הכדים הריקים.

1. ההתפלגות של X היא

(א) בינומית (ב) היפרגיאומטרית (ג) פואסונית

2. מצא את ההסתברות $\mathbb{P}(X=0)$.

(א) $\frac{1}{n}$ (ב) $\frac{(n-1)^{n-1}}{n^n}$ (ג) $\frac{(n-1)^n}{n^n}$

3. מצא את ההסתברות $\mathbb{P}(X=Y=0)$.

(א) $\frac{(n-2)^n}{(n-1)^n}$ (ב) $\frac{1}{n(n-1)}$ (ג) $\frac{(n-2)^n}{n^n}$

4. מה אפשר לומר על שני המאורעות $X=0$, $Y=0$?

(א) תלות חיובית, כלומר $\mathbb{P}(X=Y=0) > \mathbb{P}(X=0)\mathbb{P}(Y=0)$ (לכל n).
 (ב) ב"ת (לכל n).
 (ג) תלות חיובית עבור n -ים מסוימים, לא לכל n .

5. מצא את התוחלת $\mathbb{E}(N)$.

(א) $\frac{(n-1)^n}{n^{n-1}}$ (ב) $\frac{n-1}{2}$ (ג) 1

6. השווה את השונות $\text{Var}(N)$ למספר $a = n\mathbb{P}(X=0)\mathbb{P}(X \neq 0)$.

(א) $\text{Var}(N) < a$ עבור n -ים מסוימים, לא לכל n .
 (ב) $\text{Var}(N) = a$ (לכל n).
 (ג) $\text{Var}(N) < a$ (לכל n).

7. מה אפשר לומר על השונות $\text{Var}\left(\frac{N}{n}\right)$ עבור $n \rightarrow \infty$?

(א) שואפת ל- ∞ .
 (ב) מתכנסת למספר סופי, לא אפס.
 (ג) מתכנסת ל-0.

סוגיה 2

מבצעים 10 ניסויים ב"ת, עם הסתברות להצלחה p בכל ניסוי ($0 < p < 1$). נגדיר מ"מ אחד ושני מאורעות:
 X הוא מספר ההצלחות,
 A הוא הצלחה בניסוי הראשון,
 $B = \{X \neq 0\}$.

8. מה אפשר לומר על שני המאורעות A, B ?

(א) $B \subset A$ (ב) A, B ב"ת (ג) A, B זרים

9. מצא את ההסתברות המותנה $\mathbb{P}(X = 1 | A)$.

(א) $\frac{10p(1-p)^9}{1-(1-p)^{10}}$ (ב) $(1-p)^9$ (ג) 1

10. מצא את ההסתברות המותנה $\mathbb{P}(X = 1 | B)$.

(א) $(1-p)^9$ (ב) $\frac{10p(1-p)^9}{1-(1-p)^{10}}$ (ג) 1

11. מצא את התוחלת המותנה $\mathbb{E}(X | A)$.

(א) $\frac{10p}{1-(1-p)^{10}}$ (ב) $1+9p$ (ג) 1

12. מצא את התוחלת המותנה $\mathbb{E}(X | B)$.

(א) $\frac{10p}{1-(1-p)^{10}}$ (ב) $1+9p$ (ג) 1

13. מה אפשר לומר על היחס $\frac{\mathbb{E}(X-1 | B)}{\mathbb{E}(X-1 | A)}$ כאשר $p \rightarrow 0$?

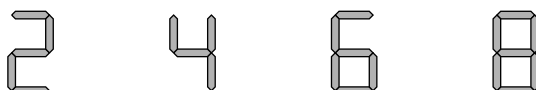
(א) מתכנס ל- $\frac{1}{2}$ (ב) מתכנס ל- $\frac{10}{9}$ (ג) מתכנס ל-1

סוגיה 3

צג מורכב מ-7 קטעים:



כל קטע מאיר בהסתברות p ללא תלות באחרים ($0 < p < 1$). ארבעת הצירופים



(ורק אלה) נחשבים מוצלחים.
נניח תחילה ש- $p = \frac{1}{2}$.

14. מצא את ההסתברות להצלחה.

(א) $\frac{1}{32}$ (ב) $\frac{4}{7}$ (ג) $\frac{128^4 - 127^4}{128^4}$

15. מצא את ההסתברות (המותנה) להצלחה בהנתן שמאירים 5 קטעים (בדיוק).

(א) $\frac{1}{42}$ (ב) $\frac{1}{10}$ (ג) $\frac{1}{128}$

עבור p כלשהו נסמן ב- $f(p)$ את ההסתברות להצלחה, וב- $g(p)$ את ההסתברות (המותנה) להצלחה בהנתן שמאירים 5 קטעים (בדיוק).

16. מצא $\frac{f(1/3)}{f(2/3)}$.

(א) 1 (ב) $\frac{1}{16}$ (ג) $\frac{1}{2}$

17. מה אפשר לומר על הפונקציה g בקטע $(0, 1)$?
(א) קבועה (ב) לא מונוטונית (ג) עולה ממש

18. יש שני צגים, הראשון בעל $p = \frac{1}{3}$, השני בעל $p = \frac{2}{3}$. בחרו באופן מקרי צג אחד (לפי הסתברויות $(1/2, 1/2)$), בצעו עמו את הניסוי, והתקבלה הצלחה. מצא את ההסתברות המותנה לכך שנבחר הצג הראשון.

(א) $\frac{1}{17}$ (ב) $\frac{1}{2}$ (ג) $\frac{1}{3}$

רשימת נוסחאות

Var (X)	E (X)	P (X = k)	ההתפלגות	
$np(1 - p)$	np	$\binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}$	$B(n, p)$	בינומית
λ	λ	$\frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$	$P(\lambda)$	פואסון
$\frac{1-p}{p^2}$	$\frac{1}{p}$	$p(1-p)^{k-1}$	$G(p)$	גיאומטרית
$\frac{n^2 - 1}{12}$	$\frac{n + 1}{2}$	$\frac{1}{n}$	$U(n)$	אחידה ב- $\{1, \dots, n\}$
$n \frac{1-p}{p^2}$	$\frac{n}{p}$	$\binom{k-1}{n-1} p^n (1-p)^{k-n}$	$NB(n, p)$	בינומית-שלילית
$n \frac{RW}{(R+W)^2} \left(1 - \frac{n-1}{R+W-1}\right)$	$n \frac{R}{R+W}$	$\frac{\binom{R}{k} \binom{W}{n-k}}{\binom{R+W}{n}}$	$H(n; R, W)$	היפרגיאומטרית

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots \quad (-1 < x < 1)$$

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \dots$$

$$\mathbb{E}(Y) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(Y | X))$$

$$\text{Var}(Y) = \mathbb{E}(\text{Var}(Y | X)) + \text{Var}(\mathbb{E}(Y | X))$$

$$\hat{Y} = \rho \frac{\sigma_Y}{\sigma_X} (X - \mathbb{E}(X)) + \mathbb{E}(Y)$$