

בחינה במבוא להסתברות

המורה: פרופ' בוריס צירלסון

משך הבחינה: 3 שעות.

מותר להשתמש בדף סכום אישי, ובמחשב כיס.

השאלון מורכב מ-18 שאלות המבוססות על 4 סוגיות. רצוי לענות על כולן.

לכל שאלה ניתנות 3 תשובות. סמן בטבלת התשובות את התשובה הנראית לך נכונה.

באם כל התשובות נראות לך לא נכונות סמן (ד).

סימון התשובה הנכונה במקום המתאים בטבלה שבתחתית עמוד זה מזכה ב-6 נקודות

זכות. סימון תשובה לא נכונה נושא שתי נקודות חובה.

הנבחן רשאי לסמן יותר מתשובה אחת באותה שאלה.

	X				X		X	X	X	X	X	X
		X			X		X	X	X	X	X	X
			X		X		X	X	X	X	X	X
			X	X		X	X	X	X	X	X	X
0	-2	6	-2	-2	-4	4	0					

דוגמה:

סה"כ הנקודות האפשרי הוא 108.

לעזרתך מצורפת רשימת נוסחאות.

בהצלחה!

	1	2	3
א			
ב			
ג			
ד			
	9	10	11
א			
ב			
ג			
ד			

	4	5	6	7	8
א					
ב					
ג					
ד					
	13	14	15	16	17
א					
ב					
ג					
ד					

סוגיה 1

כיתה מכילה 10 בנות ו-10 בנים.

1. מסדרים את הכיתה באופן מקרי. מצא את ההסתברות לכך שבנות תופסות את 10 המקומות הראשונים.

$$\frac{20!}{(10!)^2 2^{20}} \quad (\text{א}) \qquad \frac{(10!)^2}{20!} \quad (\text{ב}) \qquad \frac{1}{2^{10}} \quad (\text{ג})$$

2. דוגמים מהכיתה מדגם סדור בגודל 20 עם החזרה. מצא את ההסתברות לכך ש-10 המקומות הראשונים במדגם תפוסים ע"י בנות, ו-10 המקומות האחרונים תפוסים ע"י בנים.

$$\frac{20!}{(10!)^2 2^{20}} \quad (\text{א}) \qquad \frac{1}{2^{10}} \quad (\text{ב}) \qquad \frac{(10!)^2}{20!} \quad (\text{ג})$$

3. דוגמים מהכיתה מדגם סדור בגודל 20 עם החזרה. מצא את ההסתברות לכך שבנות תופסות 10 מקומות (כלשהם) במדגם, ובנים תופסים 10 מקומות.

$$\frac{1}{2^{10}} \quad (\text{א}) \qquad \frac{(10!)^2}{20!} \quad (\text{ב}) \qquad \frac{20!}{(10!)^2 2^{20}} \quad (\text{ג})$$

סוגיה 2

נתונים 9 כרטיסים עם אותיות

ה ט ט ט י י ס ס ק

4. מסדרים את הכרטיסים בסדר מקרי. מצא את ההסתברות שיתקבל

ה ק י ט י ט ט ס

$$\frac{1}{2^3 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7} \quad (\text{א}) \qquad \frac{1}{2^4 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7} \quad (\text{ב}) \qquad \frac{1}{2^7 \cdot 3^4 \cdot 5 \cdot 7} \quad (\text{ג})$$

5. דוגמים מהכרטיסים מדגם סדור בגודל 9, עם החזרה. מצא את ההסתברות שיתקבל

ה ק י ט י ט ט ס

$$\frac{2^3}{3^{17}} \quad (\text{א}) \qquad \frac{2^4}{3^{15}} \quad (\text{ב}) \qquad \frac{1}{3^{18}} \quad (\text{ג})$$

6. דוגמים מהכרטיסים מדגם סדור בגודל 9, עם החזרה. מצא את ההסתברות לכך שהמדגם מכיל $\boxed{\text{ט}}$ 3 פעמים, $\boxed{\text{י}}$ פעמיים, $\boxed{\text{ס}}$ פעמיים, $\boxed{\text{ה}}$ פעם אחת וגם $\boxed{\text{ק}}$ פעם אחת.

$$\frac{1}{3^{18}} \quad (\text{א}) \qquad \frac{2^4}{3^{15}} \quad (\text{ב}) \qquad \frac{2^8 \cdot 5 \cdot 7}{3^{12}} \quad (\text{ג})$$

7. דוגמים שוב מדגם סדור בגודל 9, עם החזרה. יהי X מספר הפעמים שהמדגם מכיל $\boxed{\text{ט}}$, ו- Y מספר הפעמים שהמדגם מכיל $\boxed{\text{ס}}$. מצא את התוחלת המותנה $\mathbb{E}(Y|X)$.

$$2 \quad (\text{א}) \qquad 2 - \frac{2}{9}X \quad (\text{ב}) \qquad 3 - \frac{1}{3}X \quad (\text{ג})$$

8. מצא את השונות המותנה $\text{Var}(Y|X)$ עבור X, Y משאלה 7.

$$\frac{14}{9} \quad (\text{א}) \qquad \frac{14}{9} - \frac{14}{81}X \quad (\text{ב}) \qquad 2 - \frac{2}{9}X \quad (\text{ג})$$

סוגיה 3

בשלב ראשון מגרילים מספר X (לפי התפלגות לאו דווקא אחידה) מתוך $\{0, 1, 2, \dots, n\}$. בשלב שני דוגמים מתוך $\{1, 2, \dots, n\}$ מדגם M בגודל X , לא סדור, ללא החזרה.

9. מה אפשר לומר על ההסתברות $\mathbb{P}(1 \in M)$ לכך שמספר 1 שייך למדגם? רמז: התניה ב- X .

$$\mathbb{P}(1 \in M) = \mathbb{P}(X = 1) \quad (\text{א})$$

$$\mathbb{P}(1 \in M) = \frac{1}{n}\mathbb{E}(X) \quad (\text{ב})$$

$$\mathbb{P}(1 \in M) = \frac{1}{n}X \quad (\text{ג})$$

10. מה אפשר לומר על התלות בין שני המאורעות, $1 \in M$ ו- $2 \in M$? (א) תלות שלילית.

$$n\mathbb{E}(X^2 - X) > (n-1)(\mathbb{E}(X))^2 \quad \text{אם (ב) תלות חיובית}$$

$$n\mathbb{E}(X^2 - X) = (n-1)(\mathbb{E}(X))^2 \quad \text{אם (ג) תלות שלילית}$$

$$n\mathbb{E}(X^2 - X) < (n-1)(\mathbb{E}(X))^2 \quad \text{אם (א) תלות חיובית}$$

$$\mathbb{E}(X^2 - X) > (\mathbb{E}(X))(\mathbb{E}(X) - 1) \quad \text{אם (ב) תלות שלילית}$$

$$\mathbb{E}(X^2 - X) = (\mathbb{E}(X))(\mathbb{E}(X) - 1) \quad \text{אם (ג) תלות חיובית}$$

$$\mathbb{E}(X^2 - X) < (\mathbb{E}(X))(\mathbb{E}(X) - 1) \quad \text{אם (א) תלות שלילית}$$

11. מתי שלושה המאורעות, $1 \in M$, $2 \in M$ ו- $3 \in M$ בלתי תלויים? (א) התנאי $\mathbb{E}(X^3 - 3X^2 + 2X) = (\mathbb{E}(X))(\mathbb{E}(X) - 1)(\mathbb{E}(X) - 2)$ הוא הכרחי ומספיק.

$$n^2\mathbb{E}(X^3 - 3X^2 + 2X) = (n^2 - 3n + 2)(\mathbb{E}(X))^3 \quad \text{הוא הכרחי ומספיק. (ב) התנאי}$$

(ג) התנאי $n^2 \mathbb{E}(X^3 - 3X^2 + 2X) = (n^2 - 3n + 2)(\mathbb{E}(X))^3$ הוא מספיק אך לא הכרחי.

12. מתי n המאורעות, $1 \in M, 2 \in M, \dots, n \in M$ בלתי תלויים?
 (א) התנאי $X \sim B(n, p)$ עבור p כלשהו הוא מספיק אך לא הכרחי.
 (ב) התנאי $X \sim B(n, p)$ עבור p כלשהו הוא הכרחי אך לא מספיק.
 (ג) אם ורק אם X בעל התפלגות בינומית, $X \sim B(n, p)$ עבור p כלשהו.

סוגיה 4

מטילים קוביה הוגנת 9 פעמים, מקבלים משתנים מקריים ב"ת ש"ה X_1, X_2, \dots, X_9 , בעלי התפלגות אחידה ב- $\{1, 2, \dots, 6\}$. נגדיר הצלחה בניסוי ה- k ($k = 2, \dots, 9$) ע"י אי-שוויון

$$X_k < 2X_1 - 3$$

יהי N מספר ההצלחות בין 8 הניסויים.

13. מצא את ההתפלגות המותנה של N בהנתן $X_1 = 3$.
 (א) $H(3; 2, 4)$ (ב) $B(8, \frac{1}{3})$ (ג) $U(0, 8)$

14. מצא את התוחלת $\mathbb{E}(N)$.
 (א) $\frac{8}{3}(X_1 - 2)$ (ב) 4 (ג) $\frac{8}{3}$

15. כמה ערכים שונים מקבל המ"מ $\text{Var}(N | X_1)$ (שונות מותנה)?
 (א) 6 (ב) 4 (ג) 3

16. מצא יחס בין ההסתברויות המותנות
 $\frac{\mathbb{P}(X_1 = 3 | N = 3)}{\mathbb{P}(X_1 = 4 | N = 3)}$
 רמז: נוסחת בייז.
 (א) $\frac{17}{6}$ (ב) 1 (ג) 4

17. מצא את ההסתברות המותנה $\mathbb{P}(X_1 = 3 | N = 3)$.
 (א) $\frac{17}{27}$ (ב) $\frac{1}{2}$ (ג) $\frac{4}{5}$

18. מטילים את הקוביה פעם עשירית. מצא את ההסתברות המותנה להצלחה, $\mathbb{P}(X_{10} < 2X_1 - 3 | N = 3)$.
 (א) $\frac{1}{2}$ (ב) $\frac{2}{5}$ (ג) $\frac{1}{3}$

רשימת נוסחאות

Var (X)	E (X)	P (X = k)	ההתפלגות	
$np(1 - p)$	np	$\binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}$	$B(n, p)$	בינומית
λ	λ	$\frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$	$P(\lambda)$	פואסון
$\frac{1-p}{p^2}$	$\frac{1}{p}$	$p(1-p)^{k-1}$	$G(p)$	גיאומטרית
$\frac{n^2 - 1}{12}$	$\frac{n + 1}{2}$	$\frac{1}{n}$	$U(n)$	אחידה ב- $\{1, \dots, n\}$
$n \frac{1-p}{p^2}$	$\frac{n}{p}$	$\binom{k-1}{n-1} p^n (1-p)^{k-n}$	$NB(n, p)$	בינומית-שלילית
$n \frac{RW}{(R+W)^2} \left(1 - \frac{n-1}{R+W-1} \right)$	$n \frac{R}{R+W}$	$\frac{\binom{R}{k} \binom{W}{n-k}}{\binom{R+W}{n}}$	$H(n; R, W)$	היפרגיאומטרית

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots \quad (-1 < x < 1)$$

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \dots$$

$$\mathbb{E}(Y) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(Y | X))$$

$$\text{Var}(Y) = \mathbb{E}(\text{Var}(Y | X)) + \text{Var}(\mathbb{E}(Y | X))$$

$$\hat{Y} = \rho \frac{\sigma_Y}{\sigma_X} (X - \mathbb{E}(X)) + \mathbb{E}(Y)$$