

סמסטר ב', מועד א', תשס"ד
 תאריך הבחינה: 15.06.2004
 מספר קורס: 0365-1102

מספר התלמיד _____

בחינה במבוא להסתברות

המורה: פרופ' בוריס צירלסון

משך הבחינה: 3 שעות.

מותר להשתמש בדף סכום אישי, ובמחשב כיס.

השאלון מורכב מ-19 שאלות המבוססות על 5 סוגיות. רצוי לענות על כולן.

לכל שאלה ניתנות 3 תשובות. סמן בטבלת התשובות את התשובה הנראית לך נכונה.

באם כל התשובות נראות לך לא נכונות סמן (ד).

סימון התשובה הנכונה במקום המתאים בטבלה שבתחתית עמוד זה מזכה ב-6 נקודות

זכות. סימון תשובה לא נכונה נושא שתי נקודות חובה.

הנבחן רשאי לסמן יותר מתשובה אחת באותה שאלה.

	x				x		x	x	x
		x			x		x	x	x
			x		x		x	x	x
			x	x		x	x	x	x
0	-2	6	-2	-2	-4	4	0		

דוגמה:

סה"כ הנקודות האפשרי הוא 114.

לעזרתך מצורפת רשימת נוסחאות.

בהצלחה!

1 2 3	4 5 6 7	8 9 10 11																																																								
<table style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr><td style="border: none;">א</td><td style="border: 1px solid black; width: 33px; height: 20px;"></td><td style="border: 1px solid black; width: 33px; height: 20px;"></td><td style="border: 1px solid black; width: 33px; height: 20px;"></td></tr> <tr><td style="border: none;">ב</td><td style="border: 1px solid black; width: 33px; height: 20px;"></td><td style="border: 1px solid black; width: 33px; height: 20px;"></td><td style="border: 1px solid black; width: 33px; height: 20px;"></td></tr> <tr><td style="border: none;">ג</td><td style="border: 1px solid black; width: 33px; height: 20px;"></td><td style="border: 1px solid black; width: 33px; height: 20px;"></td><td style="border: 1px solid black; width: 33px; height: 20px;"></td></tr> <tr><td style="border: none;">ד</td><td style="border: 1px solid black; width: 33px; height: 20px;"></td><td style="border: 1px solid black; width: 33px; height: 20px;"></td><td style="border: 1px solid black; width: 33px; height: 20px;"></td></tr> </table>	א				ב				ג				ד				<table style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr><td style="border: none;">א</td><td style="border: 1px solid black; width: 33px; height: 20px;"></td><td style="border: 1px solid black; width: 33px; height: 20px;"></td><td style="border: 1px solid black; width: 33px; height: 20px;"></td><td style="border: 1px solid black; width: 33px; height: 20px;"></td></tr> <tr><td style="border: none;">ב</td><td style="border: 1px solid black; width: 33px; height: 20px;"></td><td style="border: 1px solid black; width: 33px; height: 20px;"></td><td style="border: 1px solid black; width: 33px; height: 20px;"></td><td style="border: 1px solid black; width: 33px; height: 20px;"></td></tr> <tr><td style="border: none;">ג</td><td style="border: 1px solid black; width: 33px; height: 20px;"></td><td style="border: 1px solid black; width: 33px; height: 20px;"></td><td style="border: 1px solid black; width: 33px; height: 20px;"></td><td style="border: 1px solid black; width: 33px; height: 20px;"></td></tr> <tr><td style="border: none;">ד</td><td style="border: 1px solid black; width: 33px; height: 20px;"></td><td style="border: 1px solid black; width: 33px; height: 20px;"></td><td style="border: 1px solid black; width: 33px; height: 20px;"></td><td style="border: 1px solid black; width: 33px; height: 20px;"></td></tr> </table>	א					ב					ג					ד					<table style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr><td style="border: none;">א</td><td style="border: 1px solid black; width: 33px; height: 20px;"></td><td style="border: 1px solid black; width: 33px; height: 20px;"></td><td style="border: 1px solid black; width: 33px; height: 20px;"></td><td style="border: 1px solid black; width: 33px; height: 20px;"></td></tr> <tr><td style="border: none;">ב</td><td style="border: 1px solid black; width: 33px; height: 20px;"></td><td style="border: 1px solid black; width: 33px; height: 20px;"></td><td style="border: 1px solid black; width: 33px; height: 20px;"></td><td style="border: 1px solid black; width: 33px; height: 20px;"></td></tr> <tr><td style="border: none;">ג</td><td style="border: 1px solid black; width: 33px; height: 20px;"></td><td style="border: 1px solid black; width: 33px; height: 20px;"></td><td style="border: 1px solid black; width: 33px; height: 20px;"></td><td style="border: 1px solid black; width: 33px; height: 20px;"></td></tr> <tr><td style="border: none;">ד</td><td style="border: 1px solid black; width: 33px; height: 20px;"></td><td style="border: 1px solid black; width: 33px; height: 20px;"></td><td style="border: 1px solid black; width: 33px; height: 20px;"></td><td style="border: 1px solid black; width: 33px; height: 20px;"></td></tr> </table>	א					ב					ג					ד				
א																																																										
ב																																																										
ג																																																										
ד																																																										
א																																																										
ב																																																										
ג																																																										
ד																																																										
א																																																										
ב																																																										
ג																																																										
ד																																																										
12 13 14 15	16 17 18 19																																																									
<table style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr><td style="border: none;">א</td><td style="border: 1px solid black; width: 33px; height: 20px;"></td><td style="border: 1px solid black; width: 33px; height: 20px;"></td><td style="border: 1px solid black; width: 33px; height: 20px;"></td><td style="border: 1px solid black; width: 33px; height: 20px;"></td></tr> <tr><td style="border: none;">ב</td><td style="border: 1px solid black; width: 33px; height: 20px;"></td><td style="border: 1px solid black; width: 33px; height: 20px;"></td><td style="border: 1px solid black; width: 33px; height: 20px;"></td><td style="border: 1px solid black; width: 33px; height: 20px;"></td></tr> <tr><td style="border: none;">ג</td><td style="border: 1px solid black; width: 33px; height: 20px;"></td><td style="border: 1px solid black; width: 33px; height: 20px;"></td><td style="border: 1px solid black; width: 33px; height: 20px;"></td><td style="border: 1px solid black; width: 33px; height: 20px;"></td></tr> <tr><td style="border: none;">ד</td><td style="border: 1px solid black; width: 33px; height: 20px;"></td><td style="border: 1px solid black; width: 33px; height: 20px;"></td><td style="border: 1px solid black; width: 33px; height: 20px;"></td><td style="border: 1px solid black; width: 33px; height: 20px;"></td></tr> </table>	א					ב					ג					ד					<table style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr><td style="border: none;">א</td><td style="border: 1px solid black; width: 33px; height: 20px;"></td><td style="border: 1px solid black; width: 33px; height: 20px;"></td><td style="border: 1px solid black; width: 33px; height: 20px;"></td><td style="border: 1px solid black; width: 33px; height: 20px;"></td></tr> <tr><td style="border: none;">ב</td><td style="border: 1px solid black; width: 33px; height: 20px;"></td><td style="border: 1px solid black; width: 33px; height: 20px;"></td><td style="border: 1px solid black; width: 33px; height: 20px;"></td><td style="border: 1px solid black; width: 33px; height: 20px;"></td></tr> <tr><td style="border: none;">ג</td><td style="border: 1px solid black; width: 33px; height: 20px;"></td><td style="border: 1px solid black; width: 33px; height: 20px;"></td><td style="border: 1px solid black; width: 33px; height: 20px;"></td><td style="border: 1px solid black; width: 33px; height: 20px;"></td></tr> <tr><td style="border: none;">ד</td><td style="border: 1px solid black; width: 33px; height: 20px;"></td><td style="border: 1px solid black; width: 33px; height: 20px;"></td><td style="border: 1px solid black; width: 33px; height: 20px;"></td><td style="border: 1px solid black; width: 33px; height: 20px;"></td></tr> </table>	א					ב					ג					ד																					
א																																																										
ב																																																										
ג																																																										
ד																																																										
א																																																										
ב																																																										
ג																																																										
ד																																																										

סוגיה 1

ילד מצא שמונה כרטיסים עם ספרות

2
0
0
4
2
0
0
4

וסידר אותם מחדש בסדר מקרי (ההסתברות $\frac{1}{8!}$ לכל תמורה).

1. מצא את ההסתברות שארבעת הכרטיסים הראשונים מציגים שוב את 2004.

(א) $\frac{1}{35}$ (ב) $\frac{1}{840}$ (ג) $\frac{1}{24}$

יהי X מספר המקרים (0, 1 או 2) שהצירוף 2004 מופיע (ברצף) בסדרה החדשה.

2. מצא את התוחלת $\mathbb{E}(X)$.

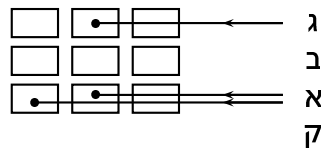
(א) $1 - \left(\frac{23}{24}\right)^5$ (ב) $\frac{4}{35}$ (ג) $\frac{1}{7}$

3. מצא את ההסתברות $\mathbb{P}(X = 2)$.

(א) $\frac{1}{420}$ (ב) $\frac{1}{96}$ (ג) $\frac{1}{8!}$

סוגיה 2

בבית יש 9 דירות: 3 דירות בקומה א', 3 דירות בקומה ב', 3 דירות בקומה ג'. שלושה דיירים משלוש דירות שונות (ההסתברות $1/\binom{9}{3}$ לכל שלישיית דירות) נכנסים למעלית בקומת קרקע. המעלית עולה מקומה לקומה סמוכה במשך 5 שניות. עצירת המעלית בקומה אחת לוקחת 10 שניות. יהי T הזמן שהמעלית תצטרך כדי להוביל את הדיירים, מספר העצירות שלה, H הגובה (מספר קומות) שהיא תעלה. למשל,



$$N = 2, \quad H = 3, \quad T = 35.$$

4. מצא $\mathbb{P}(T = 30)$.

(א) $\frac{3}{14}$ (ב) $\frac{5}{42}$ (ג) $\frac{3}{28}$

5. האם יש משתנים מקריים בלתי תלויים בין T, N, H ?

(א) T, N ב"ת, T, H ב"ת, אבל N, H תלויים.

(ב) לא; יש תלות בכול זוג.

(ג) הם תלויים, אבל ב"ת בזוגות.

.....
6. מצא $\mathbb{E}(\text{Var}(N|T))$ (תוחלת של שונות מותנה).

(א) לא מוגדר. (ב) 0 (ג) $\frac{13}{12}$

.....

7. האם יש מקדמי מתאם ± 1 בין T, N, H ?

(א) כן, $r(N, H) = -1$, אבל $|r(N, T)| < 1$, $|r(H, T)| < 1$.

(ב) לא, $|r(N, H)| < 1$, $|r(N, T)| < 1$, $|r(H, T)| < 1$.

(ג) כן, $r(N, T) = +1$ ו- $r(H, T) = +1$, אבל $|r(N, H)| < 1$.

סוגיה 3

לכל אחד מתוך 10 משתמשי האינטרנט (רונית, שרית, דוד ואחרים) יש רמת חברותיות ששווה 0, 1 או 2 בסיכויים שווים, ללא תלות באחרים. שני משתמשים הם בקשר אם ורק אם סכום של רמות החברותיות שלהם שווה 3 או יותר.

8. מצא את ההסתברות שרונית ושרית הן בקשר.

(א) $\frac{1}{30}$ (ב) $\frac{2}{9}$ (ג) $\frac{1}{2}$

יהי X מספר הזוגות (לא סדורות) שהם בקשר.

9. מצא $\mathbb{E}(X)$.

(א) $\frac{10}{3}$ (ב) 15 (ג) 30

.....

10. מצא את ההסתברות שיש קשר גם בין רונית ושרית וגם בין שרית ודוד.

(א) $\frac{5}{27}$ (ב) $\frac{5}{9}$ (ג) $\frac{1}{9}$

.....

11. מצא $\text{Var}(X)$ והשווה ל- $\mathbb{E}(X)$.

(א) $\text{Var}(X) < \mathbb{E}(X)$.

(ב) $\mathbb{E}(X) \leq \text{Var}(X) < 2\mathbb{E}(X)$.

(ג) $3\mathbb{E}(X) \leq \text{Var}(X) < 4\mathbb{E}(X)$.

סוגיה 4

יהי (X, Y, Z) מדגם סדור בגודל 3, ללא החזרה, מתוך הקבוצה $\{1, 2, \dots, 10\}$.

12. מצא $\mathbb{P}(X < Z, Y < Z)$.

רמז: $(X, Y, Z) \sim (X, Z, Y) \sim (Z, X, Y) \sim \dots$

$\frac{1}{3}$ (ג)	$\frac{10!}{8!9!}$ (ב)	$\frac{1}{6}$ (א)
.....		
. $\mathbb{P}(Z = 8)$ מצא 13		
$\frac{1}{8}$ (ג)	$\frac{7}{40}$ (ב)	$\frac{3}{10}$ (א)
.....		
. $\mathbb{P}(Z = 8 Y < Z)$ מצא 14		
$\frac{1}{9}$ (ג)	$\frac{7}{45}$ (ב)	$\frac{1}{5}$ (א)
.....		
. $\mathbb{P}(Z = 8 X < Y < Z)$ מצא 15		
$\frac{7}{40}$ (ג)	$\frac{1}{8}$ (ב)	$\frac{3}{11}$ (א)

סוגיה 5

בשלב הראשון בוחרים באקראי מספר N לפי התפלגות אחידה $U(0, 9)$. בשלב השני דוגמים מדגם E לא סדור בגודל N , ללא החזרה, מתוך הקבוצה $\{1, 2, \dots, 9\}$. (יתכן ש- $N = 0$ או $E = \emptyset$).

. $\mathbb{P}(N = 7)$ מצא 16		
$\frac{2!7!}{9!}$ (ג)	$\frac{1}{9}$ (ב)	$\frac{2!7!}{10!}$ (א)
.....		
. $\mathbb{P}(N = 7 1 \in E)$ מצא 17		
$\frac{1}{5}$ (ג)	$\frac{1}{9}$ (ב)	$\frac{7}{45}$ (א)
.....		
. $\mathbb{P}(N = 7 1 \in E, 2 \in E)$ מצא 18		
$\frac{1}{8}$ (ג)	$\frac{7}{40}$ (ב)	$\frac{3}{11}$ (א)
.....		
. $\mathbb{P}(1 \in E, 2 \in E)$ מצא 19		
$\frac{1}{3}$ (ג)	$\frac{10!}{8!9!}$ (ב)	$\frac{1}{6}$ (א)

רשימת נוסחאות

Var (X)	E (X)	P (X = k)	ההתפלגות	
$np(1 - p)$	np	$\binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}$	$B(n, p)$	בינומית
λ	λ	$\frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$	$P(\lambda)$	פואסון
$\frac{1-p}{p^2}$	$\frac{1}{p}$	$p(1-p)^{k-1}$	$G(p)$	גיאומטרית
$\frac{n^2-1}{12}$	$\frac{n+1}{2}$	$\frac{1}{n}$	$U(n)$	אחידה ב- $\{1, \dots, n\}$
$n \frac{1-p}{p^2}$	$\frac{n}{p}$	$\binom{k-1}{n-1} p^n (1-p)^{k-n}$	$NB(n, p)$	בינומית-שלילית
$n \frac{RW}{(R+W)^2} \left(1 - \frac{n-1}{R+W-1}\right)$	$n \frac{R}{R+W}$	$\frac{\binom{R}{k} \binom{W}{n-k}}{\binom{R+W}{n}}$	$H(n; R, W)$	היפרגיאומטרית

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots \quad (-1 < x < 1)$$

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \dots$$

$$\mathbb{E}(Y) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(Y|X))$$

$$\text{Var}(Y) = \mathbb{E}(\text{Var}(Y|X)) + \text{Var}(\mathbb{E}(Y|X))$$

$$\hat{Y} = \rho \frac{\sigma_Y}{\sigma_X} (X - \mathbb{E}(X)) + \mathbb{E}(Y)$$