

בחינה במבוא להסתברות

המורה: פרופ' בוריס צירלסון

משך הבחינה: 3 שעות.

מותר להשתמש בדף סכום אישי, ובמחשב כיס.

השאלון מורכב מ-20 שאלות המבוססות על 4 סוגיות. רצוי לענות על כולן.

לכל שאלה ניתנות 3 תשובות. סמן בטבלת התשובות את התשובה הנראית לך נכונה.

באם כל התשובות נראות לך לא נכונות סמן (ד).

סימון התשובה הנכונה במקום המתאים בטבלה שבתחתית עמוד זה מזכה ב-6 נקודות

זכות. סימון תשובה לא נכונה נושא שתי נקודות חובה.

הנבחן רשאי לסמן יותר מתשובה אחת באותה שאלה.

<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>

דוגמה:

0 -2 6 -2 -2 -4 4 0

סה"כ הנקודות האפשרי הוא 120.

לעזרתך מצורפת רשימת נוסחאות.

בהצלחה!

	1	2	3	4	5	6	7	8
א								
ב								
ג								
ד								

	9	10	11	12	13
א					
ב					
ג					
ד					

	14	15	16	17
א				
ב				
ג				
ד				

	18	19	20
א			
ב			
ג			
ד			

סוגיה 1

בטבלה של 3×3 משבצות, כל משבצת היא לבנה (בסיכוי $1/2$) או כחולה (בסיכוי $1/2$), והן ב"ת. נסמן ב- N את מספר המשבצות הלבנות וב- X את מספר השורות הלבנות (כלומר, שורות של שלוש משבצות לבנות).

1. ההתפלגות של N היא:

- (א) בינומית-שלילית. (ב) היפרגיאמטרית. (ג) אחידה.

2. ההתפלגות של X היא:

- (א) אחידה $U(0, 3)$.
 (ב) בינומית $B(3, 1/8)$.
 (ג) היפרגיאמטרית $H(3; X, 9 - X)$.

3. נתבונן בתוחלת המותנה $\mathbb{E}(X | N = n)$. מתי היא מתאפסת?

- (א) אף פעם לא.
 (ב) אם ורק אם $n = 0$.
 (ג) אם ורק אם $n \in \{0, 1, 2\}$.

4. ההסתברות $\mathbb{P}(\mathbb{E}(X | N) = 0)$ היא:

- (א) $\frac{7}{64}$ (א) $\frac{23}{256}$ (ב) 0 (ג)

5. נתבונן בשונות מותנה $\text{Var}(X | N = n)$. מתי היא מתאפסת?

- (א) אם ורק אם $n \in \{0, 1, 2, 8, 9\}$.
 (ב) אף פעם לא.
 (ג) אם ורק אם $n \in \{0, 1, 2\}$.

6. ההסתברות $\mathbb{P}(\text{Var}(X | N) = 0)$ היא:

- (א) $\frac{7}{64}$ (א) 0 (ב) $\frac{23}{256}$ (ג)

7. מתי $\mathbb{E}(X | N = n) = \mathbb{P}(X = 1 | N = n)$?

- (א) אף פעם לא.
 (ב) אם ורק אם $1 \leq n \leq 5$.
 (ג) אם ורק אם $n < 5$.

8. מצא את ההסתברות המותנה $\mathbb{P}(X = 0 | N = 5)$.

- (א) $\frac{9}{14}$ (א) 0 (ב) $\frac{467}{512}$ (ג)

סוגיה 2

שחקן מקבל שני קלפים, כל אחד או חזק (בסיכוי $1/2$) או חלש (בסיכוי $1/2$), והם ב"ת. הוא חושף אותם אחד אחרי השני. אם יש ברירה, שחקן נועז מתחיל בקלף חזק, ושחקן לא נועז חושף קלפים בסדר מקרי.

9. שחקן נועז חשף קלף אחד והוא חזק. מה ההסתברות (המותנה) שהקלף האחר גם הוא חזק?

- (א) $1/3$ (ב) $1/4$ (ג) $1/2$

10. אותה השאלה עבור שחקן לא נועז.

- (א) $1/3$ (ב) $2/5$ (ג) $1/2$

מכאן ואילך בסוגיה זו, השחקן נבחר באקראי מאוכלוסייה שמכילה 50% נועזים ו-50% לא נועזים.

11. אותה השאלה שקודם (עבור השחקן המקרי).

- (א) $2/5$ (ב) $1/3$ (ג) $1/4$

12. השחקן חשף שני קלפים חזקים. מה ההסתברות (המותנה) שהוא נועז?

- (א) $2/3$ (ב) $1/3$ (ג) $3/5$

13. השחקן חשף קלף חזק ואחריו קלף חלש. מה ההסתברות (המותנה) שהוא נועז?

- (א) $2/3$ (ב) $3/5$ (ג) $1/2$

סוגיה 3

נתונה מקלדת בעלת k מקשים, $k > 9$. קוף מבצע סדרה של הקשות בלתי תלויות ובעלות התפלגות אחידה על מקשי המקלדת. המקלדת מורכבת מ-9 המקשים [1], ..., [9], ועוד $(k-9)$ מקשים אחרים שכל אחד מהם מפסיק את הקלט. יהי N מספר הספרות הנקלטות ו- X כפל של הספרות. נסכים ש- $X = 1$ כאשר $N = 0$.

14. ההתפלגות של $N + 1$ היא:

(א). היפרגיאומטרית, $H(1; k-9, 9)$.

(ב). גיאומטרית, $G\left(\frac{k-9}{k}\right)$.

(ג). בינומית, $B\left(k, \frac{k-9}{k}\right)$.

15. התוחלת המותנה $\mathbb{E}(X | N = n)$ היא:

$$\dots \dots \dots \left(\frac{9}{k-9}\right)^n \text{ (א)} \quad \frac{9}{k-9} \text{ (ב)} \quad 5^n \text{ (ג)}$$

16. מתי התוחלת של X היא סופית:

(א) אם ורק אם $k > 18$.

(ב) אם ורק אם $k > 45$.

(ג) אם ורק אם $\mathbb{E}(N) < \infty$.

17. מתי השונות של X היא סופית:

(א) אם ורק אם $k > 45$.

(ב) אם ורק אם $k > 285$.

(ג) אם ורק אם $\text{Var}(N) < \infty$.

סוגיה 4

נתונה קובייה גדולה עם פאות 1, 2, 3, 4, 5, 6 וקובייה קטנה עם פאות 1, 1, 2, 2, 3, 3 מטילים אותן $100 = 2 \times 50$ פעמים בזו אחר זו: גדולה, קטנה, גדולה, קטנה, ... יהי X מספר הפעמים שיתקבל הרצף 1, 2 (קודם 1, אחר-כך 2), Y מספר הפעמים שיתקבל הרצף 6, 1 (קודם 6, אחר-כך 1).

18. מצא $\mathbb{E}(X)$, $\text{Var}(X)$.

(א) $\mathbb{E}(X) = \frac{11}{2}$, $\text{Var}(X) = \frac{1487}{324}$.

(ב) $\mathbb{E}(X) = \frac{11}{2}$, $\text{Var}(X) = \frac{1683}{324}$.

(ג) $\mathbb{E}(X) = \frac{50}{9}$, $\text{Var}(X) = \frac{425}{81}$.

19. מצא $\mathbb{E}(Y)$, $\text{Var}(Y)$.

(א) $\mathbb{E}(Y) = \frac{11}{2}$, $\text{Var}(Y) = \frac{1487}{324}$.

(ב) $\mathbb{E}(Y) = \frac{50}{9}$, $\text{Var}(Y) = \frac{425}{81}$.

(ג) $\mathbb{E}(Y) = \frac{25}{9}$, $\text{Var}(Y) = \frac{425}{162}$.

20. מצא חסם עליון להסתברות $\mathbb{P}(X + 3Y \geq 83)$ לפי אי-שוויון מרקוב.

(א) $\frac{4}{83}$ (ב) $\frac{1}{6}$ (ג) $\frac{6}{83}$

רשימת נוסחאות

Var (X)	E (X)	P (X = k)	ההתפלגות	
$np(1 - p)$	np	$\binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}$	$B(n, p)$	בינומית
λ	λ	$\frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$	$P(\lambda)$	פואסון
$\frac{1-p}{p^2}$	$\frac{1}{p}$	$p(1-p)^{k-1}$	$G(p)$	גיאומטרית
$\frac{n^2 - 1}{12}$	$\frac{n + 1}{2}$	$\frac{1}{n}$	$U(n)$	אחידה $\{1, \dots, n\}$ -ב
$n \frac{1-p}{p^2}$	$\frac{n}{p}$	$\binom{k-1}{n-1} p^n (1-p)^{k-n}$	$NB(n, p)$	בינומית-שלילית
$n \frac{RW}{(R+W)^2} \left(1 - \frac{n-1}{R+W-1}\right)$	$n \frac{R}{R+W}$	$\frac{\binom{R}{k} \binom{W}{n-k}}{\binom{R+W}{n}}$	$H(n; R, W)$	היפרגיאומטרית

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots \quad (-1 < x < 1)$$

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \dots$$

$$\mathbb{E}(Y) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(Y | X))$$

$$\text{Var}(Y) = \mathbb{E}(\text{Var}(Y | X)) + \text{Var}(\mathbb{E}(Y | X))$$

$$\hat{Y} = \rho \frac{\sigma_Y}{\sigma_X} (X - \mathbb{E}(X)) + \mathbb{E}(Y)$$