

סמסטר ב', מועד א', תשס"ט  
תאריך הבחינה: 08.07.2009  
מספר קורס: 0366-3022

**בחינה במבוא לאנליזה פונקציונלית**  
המורה: פרופ' בוריס צירלסון

משך הבחינה: 3 שעות.  
רצוי לענות על כל השאלות.

בהצלחה!

---

---

**שאלה 1**

(א) מצאו את כל הקטעים  $[a, b] \subset \mathbb{R}$  שעבורם פונקצית האינדיקטור

$$f = \mathbb{1}_{[a,b]} \in L_2(\mathbb{R})$$

מקיימת

$$\mathcal{F}(\mathcal{F}(f)) = f.$$

.....  
(ב) אותו הדבר עבור

$$\mathcal{F}(\mathcal{F}(f)) = -f.$$

רמז: הזכרו בהתמרת פוריה ההפוכה.

---

---

**שאלה 2**

תהיו  $\varphi, \psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  פונקציות מדידות מקיימות  $\varphi(x)\psi(x) = 1$  כמעט לכל  $x \in \mathbb{R}$ .  
(א) נסחו והוכיחו יחס בין האופרטורים  $\varphi(Q)$ ,  $\psi(Q)$ .

.....  
(ב) אותו הדבר עבור  $\varphi(P)$ ,  $\psi(P)$ .

---

---

### שאלה 3

יהיו  $U$  אופרטור אוניטרי. הוכחו או הפרכו:  
אם  $1_{\{\lambda\}}(U) \neq 0$  אז קיים  $x \neq 0$  כך ש- $Ux = \lambda x$ .

---

---

### שאלה 4

נגדיר דיסטריבוציה  $T \in D'_1(-1, 1)$  ע"י

$$\langle T, \varphi \rangle = \int_0^1 \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x} dx$$

לכל  $\varphi \in D_1(-1, 1)$  הוכחו או הפרכו:  
(א) קיימת  $f \in L_1(-1, 1)$  כך ש- $f' = T$ ;

.....  
(ב) קיימת  $f \in L_\infty(-1, 1)$  כך ש- $f' = T$ .

---

---