סמסטר ב', מועד דוגמה, תשע"ו
תאריך הבחינה: 2016
מספר קורס: 0366-2141

בחינה בחשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי 3

מרצה: פרופ' בוריס צירלסון

משך הבחינה: 3 שעות.
מותר להשתמש בדף סיכום אישי.
בחרו 3 מתוך 4 השאלות הבאות.

בהצלחה!

תזכורת: "פונקציה אינטגרבילית" היא אינטגרבילית לפי אינטגרל רימן (אמיתי); בהכרח חסומה, עם תומך חסום.

שאלה 1

=35

תהיינה $a, b, c \in \mathbb{R}^n$ ב"ת לינארית, ו- $g \in C^1(\mathbb{R}^3)$.
בספרה $S = \{x : |x| = 1\} \subset \mathbb{R}^n$ נגדיר פונקציה

$$f(x) = g\big(|x-a|^2, |x-b|^2, |x-c|^2\big) .$$

נניח כי $x_0 \in S$ היא נקודת קיצון מקומית של f ב- S , ו-
$\nabla g(|x-a|^2, |x-b|^2, |x-c|^2) \neq 0$.
הוכיחו כי x_0 שייכת לתת-מרחב תלת-ממדי הנפרש ע"י a, b, c .

שאלה 2

=35

תהי $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ פונקציה אינטגרבילית. נגדיר $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$,

$$\varphi(x, y) = \big(x, y + \psi(x)\big) .$$

(א) לכל תיבה $B \subset \mathbb{R}^2$ הוכיחו כי התמונה $\varphi(B)$ היא קבוצה מותרת, ו-

$$v\big(\varphi(B)\big) = v(B) .$$

. . . .

(ב) לכל פונקציה אינטגרבילית $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ הוכיחו כי $f \circ \varphi$ היא אינטגרבילית, ו-

$$\int_{\mathbb{R}^2} f \circ \varphi = \int_{\mathbb{R}^2} f .$$

רמז: פונקצית מדרגות; סנדוויץ'.

שאלה 3

=35

תהי $E \subset \mathbb{R}^3$ קבוצה מותרת, $v(E) \neq 0$, ונקודה (x_0, y_0, z_0) היא מרכז הכובד של E , כלומר, $f(x_0, y_0, z_0) = \frac{1}{v(E)} \int_E f$ לכל פונקציה לינארית $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$. הוכיחו כי

(א) אם לכל x, y, z מתקיים $(x, y, -z) \in E \iff (x, y, z) \in E$, אז $z_0 = 0$;

(ב) אם יש $\theta \in (0, 2\pi)$ כך שלכל x, y, z מתקיים
$(x\cos\theta - y\sin\theta, x\sin\theta + y\cos\theta, z) \in E \iff (x, y, z) \in E$,
אז $x_0 = y_0 = 0$.

שאלה 4

=35

(א) הוכיחו כי

$$\int\limits_{0<s_1<\dots<s_n<1} \cdots \int f(s_1, s_2-s_1, \dots, s_n-s_{n-1})\, \mathrm{d}s_1 \dots \mathrm{d}s_n = \int\limits_{\substack{x_1,\dots x_n>0,\\ x_1+\dots+x_n<1}} \cdots \int f(x_1, \dots, x_n)\, \mathrm{d}x_1 \dots \mathrm{d}x_n$$

לכל פונקציה אינטגרבילית $f : E \to \mathbb{R}$ על הקבוצה
$E = \{(x_1, \dots, x_n) : x_1, \dots x_n > 0, x_1 + \dots + x_n < 1\} \subset \mathbb{R}^n$.

....

(ב) מצאו את האינטגרלים

$$n! \int\limits_{0<s_1<\dots<s_n<1} \cdots \int \mathrm{d}s_1 \dots \mathrm{d}s_n \,,$$

$$n! \int\limits_{0<s_1<\dots<s_n<1} \cdots \int s_k\, \mathrm{d}s_1 \dots \mathrm{d}s_n \,,$$

$$n! \int\limits_{0<s_1<\dots<s_n<1} \cdots \int s_k^2\, \mathrm{d}s_1 \dots \mathrm{d}s_n$$

עבור כל $k = 1, \dots, n$.
