סמסטר ב', מועד ב', תשע"ו
תאריך הבחינה: 05.08.2016
מספר קורס: 0366-2141

בחינה בחשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי 3

מרצה: פרופ' בוריס צירלסון

משך הבחינה: 3 שעות.
מותר להשתמש בדף סיכום אישי.
בחרו 3 מתוך 4 השאלות הבאות.

בהצלחה!

תזכורת: "פונקציה אינטגרבילית" היא אינטגרבילית לפי אינטגרל רימן (אמיתי);
בהכרח חסומה, עם תומך חסום.

שאלה 1

=35

תהי $M \subset \mathbb{R}^n$ יריעה k–ממדית, $f \in C^1(\mathbb{R}^n)$, ו- $x_0 \in M$ היא נקודת קיצון מקומית של f ב- M. הוכיחו קיום של פונקציה $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, גזירה ברציפות בסביבה של x_0, כזאת ש- $g(\cdot) = 0$ ב- M בסביבה של x_0, ו- $\nabla g(x_0) = \nabla f(x_0)$.
רמז: יש הוכחה קצרה...

שאלה 2

=35

בהנתן פונקציה אינטגרבילית $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ ומספר $\theta \in \mathbb{R}$, נגדיר $f_\theta : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ ע"י

$$f_\theta(x,y) = f(x\cos\theta - y\sin\theta, x\sin\theta + y\cos\theta)\,.$$

הוכיחו כי לכל $\varepsilon > 0$ קיים $\delta > 0$ כך שלכל θ,

$$|\theta| \le \delta \implies \int_{\mathbb{R}^2} |f_\theta - f| \le \varepsilon\,.$$

רמז: תחילה הוכיחו את זה עבור f רציפה.

שאלה 3

=35

בהנתן פונקציה רציפה $\theta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (לאו דווקא גזירה), נגדיר $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$,

$$\varphi(x,y,z) = \big(x\cos\theta(z) - y\sin\theta(z), x\sin\theta(z) + y\cos\theta(z), z\big)\,.$$

הוכיחו כי

(א) $\int_{\mathbb{R}^3} f \circ \varphi = \int_{\mathbb{R}^3} f$ לכל פונקציה רציפה $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ עם תומך חסום;

....

(ב) לכל פונקציה אינטגרבילית $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ הפונקציה $f \circ \varphi$ גם היא אינטגרבילית, ו- $\int_{\mathbb{R}^3} f \circ \varphi = \int_{\mathbb{R}^3} f$.

שאלה 4

=35

בהנתן $a \in (1,\infty)$, נגדיר $\varphi : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$,

$$\varphi(x) = \frac{1}{|x|^a} x\,.$$

הוכיחו כי לכל $x,y \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$

(א) $|\det(D\varphi)_x| = |\det(D\varphi)_y| \quad \Longrightarrow \quad |x| = |y|$;

....

(ב) $|\det(D\varphi)_x| = \dfrac{a-1}{|x|^{na}}$.

רמז: (א) החלפת בסיס;
(ב) $\int f(|x|)\,\mathrm{d}x = nV_n \int_0^\infty r^{n-1} f(r)\,\mathrm{d}r$ (למדנו).
