

סמסטר ב', מועד א', תשע"ז  
תאריך הבחינה: 21.06.2016  
מספר קורס: 0366-2141

בחינה בחשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי 3  
מרצה: פרופ' בוריס צירלסון

משך הבחינה: 3 שעות.  
מותר להשתמש בדף סיכום אישי.  
בחרו 3 מתוך 4 השאלות הבאות.

בהצלחה!

תזכורת: "פונקציה אינטגרבילית" היא אינטגרבילית לפי אינטגרל רימן (אמיתי);  
בהכרח חסומה, עם תומך חסום.

---

---

שאלה 1

=35

בהנתן  $\varphi_1, \dots, \varphi_{16} \in C^1(\mathbb{R}^n)$  ו-  $g \in C^1(\mathbb{R}^6)$ , נגדיר קבוצה  $Z \subset \mathbb{R}^n$  ופונקציה  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  ע"י  $Z = \{x : \varphi_1(x) = \dots = \varphi_{10}(x) = 0\}$  ו-  
 $f(x) = g(\varphi_{11}(x), \dots, \varphi_{16}(x))$ . נניח כי  $x_0 \in Z$  היא נקודת קיצון מקומית של  $f$   
ב-  $Z$ , והוקטורים  $\nabla \varphi_1(x_0), \dots, \nabla \varphi_{16}(x_0)$  ב"ת לינארית.  
הוכיחו כי  $x_0$  היא נקודת קיצון מקומית של  $f$  ב-  $\mathbb{R}^n$ .  
רמז: כופלי לגרנג' לא רלוונטיים. אם קשה, נסו תחילה מקרה פרטי:  $n = 16$ ,  
 $\varphi_{16}(x_1, \dots, x_{16}) = x_{16}, \dots, \varphi_1(x_1, \dots, x_{16}) = x_1$

---

---

שאלה 2

=35

בהנתן פונקציה חסומה  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , נגדיר  $\varphi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,

$$\varphi(x, y) = (x, y + f(x)).$$

נניח כי לכל תיבה  $B \subset \mathbb{R}^2$  התמונה  $\varphi(B)$  היא קבוצה מותרת.  
הוכיחו כי  $f$  רציפה כב"מ.

---

---

### שאלה 3

=35

הוכיחו כי

$$\int_{\mathbb{R}^n} \langle h_1, x \rangle \langle h_2, x \rangle e^{-|x|} dx = (n+1) \langle h_1, h_2 \rangle \int_{\mathbb{R}^n} e^{-|x|} dx$$

(א) עבור  $h_1 = h_2$  ;

(ב) עבור  $\langle h_1, h_2 \rangle = 0$  ;

(ג) לכל  $h_1, h_2 \in \mathbb{R}^n$  .

רמז:  $\int f(|x|) dx = nV_n \int_0^\infty r^{n-1} f(r) dr$  (למדנו);  $\int x_1^2 e^{-|x|} dx = \frac{1}{n} \int |x|^2 e^{-|x|} dx$  (הוכיחו).

### שאלה 4

=35

הוכיחו כי

$$\iint_{\mathbb{R}^2} f(x+y, xy) dx dy = 2 \iint_{u^2 > 4v} \frac{f(u, v)}{\sqrt{u^2 - 4v}} du dv$$

לכל פונקציה  $f : G \rightarrow [0, \infty)$  רציפה כב"מ; כאן  $G = \{(u, v) : u^2 > 4v\} \subset \mathbb{R}^2$  .