סמסטר ב', מועד א' , תשע"ה
תאריך הבחינה: 01.07.2015
מספר קורס: 0366-2180

בחינה בחשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי 4

המורה: פרופ' בוריס צירלסון

משך הבחינה: 3 שעות.
מותר להשתמש בדף סיכום אישי.
בחרו 3 מתוך 4 השאלות הבאות.

בהצלחה!

שאלה 1

=35

(א) בהנתן $g \in C^1\big(\mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to (0,\infty)\big)$, נגדיר $\varphi : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ ע"י

$$\varphi(x) = g(x)x\,.$$

בהנחה ש- $(D_x g)_x \ne 0$ הוכיחו כי

$$\det(D\varphi)_x = \big(g(x) + (D_x g)_x\big)\big(g(x)\big)^{n-1}\,.$$

רמז: יש בסיס כך ש- $(D_{e_1} g)_x = \dots = (D_{e_{n-1}} g)_x = 0$ ו- $e_n = x$.

....

(ב) תהי $\|\cdot\|$ נורמה על $\mathbb{R}^n$, גזירה ברציפות ב- $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, ו- $\alpha \in (1,\infty)$. הוכיחו כי

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\,\mathrm{d}x = (\alpha-1)\int_{\mathbb{R}^n} f\Big(\frac{x}{\|x\|^\alpha}\Big)\,\frac{\mathrm{d}x}{\|x\|^{\alpha n}}$$

לכל פונקציה רציפה $f : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to [0,\infty)$.
(האינטגרלים לא אמיתיים, אולי מתבדרים.)

שאלה 2

=35

תהי $\gamma \in C^1\big([a,b] \to \mathbb{R}^n\big)$. נגדיר $\psi : (a,b)\times(0,1) \to \mathbb{R}^n$ ע"י

$$\psi(t,\lambda) = \lambda\gamma(t)\,.$$

בהנחה שהקבוצה $M = \psi\big((a,b)\times(0,1)\big)$ היא יריעה 2–ממדית ב– $\mathbb{R}^n$ ו–
$\big((a,b)\times(0,1),\psi\big)$ היא מפה של M הוכיחו:

(א) היעקוביאן (המוכלל) J_ψ הוא

$$J_\psi(t,\lambda) = \lambda\sqrt{|\gamma(t)|^2|\gamma'(t)|^2 - \langle\gamma(t),\gamma'(t)\rangle^2}\,.$$

....

(ב) השטח S_r של המשטח $M_r = \psi\big((a,b)\times(0,r)\big)$ (עבור $0<r<1$) מקיים

$$S_r \le \frac{r^2}{2}\int_{\gamma(a,b)} |\cdot|\,.$$

....

(ג) השוויון בסעיף (ב) מתקיים אם ורק אם $|\cdot| = \mathrm{const}$ על $\gamma(a,b)$.

שאלה 3

=35

תהי $u\in C^2(\mathbb{R}^3)$ פונקציה הרמונית, $0<\varepsilon<0.5$, ו–

$$|z|^{1-\varepsilon}|u(x,y,z)| \le (x^2+y^2)^{0.5-\varepsilon}$$

לכל $x,y,z\in\mathbb{R}$.
הוכיחו כי $u(x,y,z)=0$ לכל $x,y,z\in\mathbb{R}$.
רמז: $\iiint_{x^2+y^2+z^2<R^2} |u(x,y,z)|\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = o(R^3)$.

שאלה 4

=30

נתבונן בקבוצה $M = \{(x,y) : y = x^3\} \subset \mathbb{R}^2$ ונגדיר פונקציה $f : M\to\mathbb{R}$ ע"י
$f(x,y) = |y|$.
הוכיחו או הפריכו: M היא יריעה 1–ממדית, ו– $f\in C^1(M)$.
