סמסטר א', מועד ב', תשע"ה
תאריך הבחינה: 03.03.2015
מספר קורס: 0366-2141

בחינה בחשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי 3

מרצה: פרופ' בוריס צירלסון

משך הבחינה: 3 שעות.
מותר להשתמש בדף סיכום אישי.
בחרו 3 מתוך 4 השאלות הבאות.

בהצלחה!

שאלה 1

=35

נתבונן בקבוצה

$$A = \left\{ (x_1, \dots, x_n) : \tfrac{1}{n}(x_1 + \dots + x_n) = \tfrac{1}{3},\ \tfrac{1}{n}(x_1^2 + \dots + x_n^2) = 1 \right\} \subset \mathbb{R}^n$$

ותת–קבוצה $B \subset A$ של נקודות מהצורה

$$\big(\underbrace{a, \dots, a}_{k}, \underbrace{b, \dots, b}_{n-k} \big) .$$

לאיזשהו k ו– $a, b \in \mathbb{R}$.
הוכיחו כי

$$\max_{(x_1,\dots,x_n)\in A} \tfrac{1}{n}(x_1^3 + \dots + x_n^3) = \max_{(x_1,\dots,x_n)\in B} \tfrac{1}{n}(x_1^3 + \dots + x_n^3) .$$

(אין צורך לחשב k, a, b).

שאלה 2

=35

תהיינה $A_1, \dots, A_n, B$ נקודות במרחב אוקלידי n–ממדי, שלא נמצאות על אותו תת–מרחב אפיני $(n-1)$–ממדי.

(א) הוכיחו כי לכל $u_1, \dots, u_n \in \mathbb{R}$ מספיק קרובים ל– 0 קיימת נקודה C כך ש–

$$|C - A_1| = |B - A_1| + u_1,\ \dots,\ |C - A_n| = |B - A_n| + u_n .$$

....

(ב) האם אפשר לטעון ש– C יחידה?

שאלה 3

=30

תהיינה $f:\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}$, $g:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ פונקציות אינטגרביליות. נגדיר $h:\mathbb{R}^{m+n}\to\mathbb{R}$ על–ידי $h(x,y)=f(x)g(y)$ עבור $x\in\mathbb{R}^m$, $y\in\mathbb{R}^n$.

הוכיחו כי h היא אינטגרבילית (ללא שימוש בחומר מפרקים 8,7).

רמז: קודם עבור $f(\cdot)\ge 0$, $g(\cdot)\ge 0$ באמצעות סנדוויץ'.

שאלה 4

=40

תהי $f\in C^2(\mathbb{R})$ פונקציה עם תומך חסום. נגדיר

$$f_t(x)=f(x+t)\,.$$

(א) הוכיחו כי

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_0^\infty f_t(x)\,x\,\mathrm{d}x=-\int_0^\infty f_t(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

. . . .

(ב) הוכיחו כי

$$\iint\limits_{(0,\infty)\times(0,\infty)} f(x+y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^\infty f(x)\,x\,\mathrm{d}x\,.$$

. . . .

(ג) האם השוויון של (ב) מתקיים עבור f אינטגרבילית (לאו דווקא C^2)? תנו הוכחה או דוגמה נגדית.
