סמסטר א', מועד א', תשע"ה
תאריך הבחינה: 01.02.2015
מספר קורס: 0366-2141

בחינה בחשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי 3

מרצה: פרופ' בוריס צירלסון

משך הבחינה: 3 שעות.
מותר להשתמש בדף סיכום אישי.
בחרו 3 מתוך 4 השאלות הבאות.

בהצלחה!

שאלה 1

=35

תהי $\alpha > 0$ ו- $h \in C^1(\mathbb{R})$, $h'(r) > 0$ לכל r. נתבונן בספרואיד

$$S = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + \alpha z^2 = 1\} \subset \mathbb{R}^3$$

ושלוש נקודות $P, Q, R \in \mathbb{R}^3$ שלא נמצאות על אותו קו ישר. נניח כי $P = (x_P, y_P, z_P) \in S$ היא נקודת קיצון ב- S של הפונקציה

$$f : \tilde{P} \mapsto h(|\tilde{P} - Q|^2) + h(|\tilde{P} - R|^2) .$$

הוכיחו כי הוקטור $(x_P, y_P, \alpha z_P)$ שייך למישור הנפרש על-ידי שני וקטורים $Q - P$, $R - P$.

שאלה 2

=35

נתבונן בפונקציות

$$f_{a,b}(x) = 2^{x+a-b} - abx + 4 .$$

(א) הוכיחו כי לכל x_1 מספיק קרוב ל- 2 ולכל x_2 מספיק קרוב ל- 3 קיימים a, b כך ש-

$$f_{a,b}(x_1) = f_{a,b}(x_2) = 0 .$$

רמז: $f_{2,2}(2) = f_{2,2}(3) = 0$.

....

(ב) האם אפשר לטעון ש- a, b כאלה הם יחידים?

שאלה 3

=30

תהיינה $f,g:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ פונקציות אינטגרביליות. נגדיר $h:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ על–ידי $h(x)=f(x)g(x)$ עבור $x\in\mathbb{R}^n$.

הוכיחו כי h היא אינטגרבילית (ללא שימוש בחומר מפרקים 8,7).

שאלה 4

=40

תהי $f\in C^2(\mathbb{R}^2)$ פונקציה עם תומך חסום. נגדיר

$$f_\theta(x,y)=f(x\cos\theta-y\sin\theta,\ x\sin\theta+y\cos\theta)\,.$$

(א) הוכיחו כי

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\iint\limits_{\mathbb{R}\times(0,\infty)} f_\theta(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-\int_{\mathbb{R}} f_\theta(x,0)\,x\,\mathrm{d}x\,.$$

רמז: $\left(\frac{\partial}{\partial\theta}+y\frac{\partial}{\partial x}-x\frac{\partial}{\partial y}\right)f_\theta(x,y)=0$.

(ב) נניח בנוסף כי לכל $y\le 0$ מתקיים $f(x,y)=0$. הוכיחו מתוך (א) כי

$$\iint\limits_{\mathbb{R}\times(0,\infty)} f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_{(0,\infty)\times(0,\pi)} f(r\cos\theta,r\sin\theta)\,r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\,.$$

(ג) האם השוויון של (ב) מתקיים עבור f אינטגרבילית (לאו דווקא C^2)? תנו הוכחה או דוגמה נגדית.
