

סמסטר ב', מועד דוגמה, תשע"ד  
תאריך הבחינה: 2014  
מספר קורס: 0366-2180

בחינה בחשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי 4  
המורה: פרופ' בוריס צירלסון

משך הבחינה: 3 שעות.  
מותר להשתמש בדף סיכום אישי.  
בחרו 3 מתוך 4 השאלות הבאות.

בהצלחה!

---

---

שאלה 1

=35

נתבונן בפוטנציאל

$$U(x) = \int_{\mathbb{R}^3 \setminus \{x\}} \frac{\rho(\xi)}{|\xi - x|} d\xi$$

של פונקציה רציפה  $\rho: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  (הצפיפות של מסה או מטען חשמלי). הוכיחו:

(א) אם  $\rho$  בעלת תומך קומפקטי אז  $U(x) \rightarrow 0$  כאשר  $|x| \rightarrow \infty$ .

(ב) אם  $\int_{\mathbb{R}^3} |\rho| < \infty$  (האינטגרל לא אמיטי) אז  $U$  מוגדר היטב, כלומר,

$$\int_{\mathbb{R}^3 \setminus \{x\}} \frac{|\rho(\xi)|}{|\xi - x|} d\xi < \infty$$

לכל  $x$ .

(ג) אם  $\rho(x) = O\left(\frac{1}{|x|^4}\right)$  כאשר  $|x| \rightarrow \infty$  אז  $U$  מוגדר היטב, ו-  $U(x) \rightarrow 0$  כאשר  $|x| \rightarrow \infty$ .

רמז: פצלו את תחום האינטגרציה; לפי נימוק כללי,  $\int_1^\infty \frac{r^2 dr}{r^4 \max(1, a-r)} \rightarrow 0$  כאשר  $a \rightarrow \infty$ .

---

---

## שאלה 2

=35

נתבונן בשדה וקטורי  $B_\gamma$  שמתאים למסילה  $\gamma : [t_0, t_1] \rightarrow \mathbb{R}^3$  (גזירה ברציפות למקוטעין),

$$B_\gamma(x) = \frac{1}{4\pi} \int_{t_0}^{t_1} \frac{\gamma'(t) \times (x - \gamma(t))}{|x - \gamma(t)|^3} dt$$

(השדה המגנטי). הוכיחו:

(א) אם  $\gamma_1 \sim \gamma_2$  (כלומר,  $\int_{\gamma_1} \omega = \int_{\gamma_2} \omega$  לכל חד-תבנית  $\omega$ ), אז  $B_{\gamma_1} = B_{\gamma_2}$ .

(ב) אם  $\gamma, \gamma_i : [t_0, t_1] \rightarrow \mathbb{R}^3$  מסילות, ו-  $\gamma_i \rightarrow \gamma$  במובן ש-

$$\begin{aligned} \forall t \in [t_0, t_1] \quad \gamma_i(t) \rightarrow \gamma(t), \\ \exists L \forall i \quad \gamma_i \in \text{Lip}(L), \end{aligned}$$

אז  $B_{\gamma_i} \rightarrow B_\gamma$  במובן ש-

$$\forall x \in \mathbb{R}^3 \setminus \gamma([t_0, t_1]) \quad B_{\gamma_i}(x) \rightarrow B_\gamma(x).$$

(ג) ייתכן כי  $\gamma_i \rightarrow \gamma$  במידה שווה (כלומר,  $\max_{t \in [t_0, t_1]} |\gamma_i(t) - \gamma(t)| \rightarrow 0$  כאשר  $i \rightarrow \infty$ ), אך התנאי  $\exists L \forall i \quad \gamma_i \in \text{Lip}(L)$  לא מתקיים, וההתכנסות  $B_{\gamma_i} \rightarrow B_\gamma$  לא מתקיימת. (מצאו דוגמה נגדית).

## שאלה 3

=35

יהי  $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  שדה וקטורי (חלק  $C^1$ ) כך ש-  $\forall x \quad |\text{curl } F(x)| \leq 1$ , ו-  $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3$  לולאה (חלקה  $C^1$ ). נתבונן בצירקולציה  $\int_\gamma F$ . הוכיחו:

(א) אם  $|\gamma'(t)| \leq 1$  לכל  $t \in [0, 1]$ , אז  $|\int_\gamma F| \leq 2014$ .

(ב) אם  $\int_0^1 |\gamma'(t)| dt \leq 1$ , אז  $|\int_\gamma F| \leq 2014$ .

רמז:  $\gamma$  היא נול-הומוטופית, וההומוטופיה היא תיבה סינגולרית.

## שאלה 4

=35

יהי  $M_1 \subset \mathbb{R}^N$  יריעה  $n_1$ -ממדית,  $M_2 \subset \mathbb{R}^N$  יריעה  $n_2$ -ממדית, ו-  $M_1 \subset M_2$ . הוכיחו:

$M_1$  פתוחה (יחסית) ב-  $M_2$  אם ורק אם  $n_1 = n_2$ .

רמז: סימו לב ש-  $T_x M_1 = T_x M_2$  עבור  $x \in M_1$ .