

סמסטר ב', מועד א', תשע"ד
 תאריך הבחינה: 11.07.2014
 מספר קורס: 0366-2180

בחינה בחשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי 4
 המורה: פרופ' בוריס צירלסון

משך הבחינה: 3 שעות.
 מותר להשתמש בדף סיכום אישי.
 בחרו 3 מתוך 4 השאלות הבאות.

בהצלחה!

שאלה 1

=35

מצאו את הגבול

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\infty} \frac{|\sin \frac{1}{x}|^{1/n}}{e^x \sqrt{x}} dx .$$

(הוכיחו.)

רמז: אין צורך למצוא את האינטגרל הנתון (עבור n סופי).

שאלה 2

=40

נתבונן בשדה וקטורי B_γ שמתאים למסילה $\gamma : [t_0, t_1] \rightarrow \mathbb{R}^3$ (גזירה ברציפות למקוטעין, לאו דווקא סגורה) המוגדר בתחום $\mathbb{R}^3 \setminus \gamma([t_0, t_1])$ ע"י

$$B_\gamma(x) = \frac{1}{4\pi} \int_{t_0}^{t_1} \frac{\gamma'(t) \times (x - \gamma(t))}{|x - \gamma(t)|^3} dt$$

(השדה המגנטי). הוכיחו:

(א) $\text{curl } B_\gamma(x) = O\left(\frac{1}{|x|^2}\right)$ כאשר $|x| \rightarrow \infty$.

רמז: למדנו נוסחה עבור $\text{curl } B_\gamma$.

(ב) הצירקולציה של B_γ סביב המעגל $(x-2r)^2 + y^2 = r^2, z = 0$, היא $O(1)$ (כלומר,

חסומה) כאשר $r \rightarrow \infty$.

(ג) $\text{curl } B_\gamma(x) = O\left(\frac{1}{|x|^3}\right)$ כאשר $|x| \rightarrow \infty$.

.....
(ד) הצירקולציה של B_γ סביב המעגל $(x - (r + s))^2 + y^2 = r^2$, $z = 0$, היא $O\left(\frac{1}{s}\right)$ כאשר $s \rightarrow \infty$, במידה שווה על $r > 0$.
רמז: אינטגרל של $O\left(\frac{1}{|x|^3}\right)$ על חצי-מישור.

שאלה 3

=35

נניח כי שדה וקטורי $F \in C^1(\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3)$ מקיים

$$\text{div } F = 0;$$

$$F(x, y, z) \neq 0 \implies 0 \leq (x^2 + y^2)^{3/2} z \leq 1,$$

$$F(x, y, z) = o(x^2 + y^2 + z^2), \quad x^2 + y^2 + z^2 \rightarrow \infty.$$

נתבונן בשטף של F דרך המישור $z = c$. הוכיחו כי השטף שווה לאפס לכל $c \in \mathbb{R}$.

שאלה 4

=30

תהי $M \subset \mathbb{R}^N$ יריעה n -ממדית, $n < N$, $x_0 \in M$, $h \in T_{x_0} M$ הוכיחו קיום של יריעה חד-ממדית M_1 כך ש- $M_1 \subset M$, $x_0 \in M_1$, $h \in T_{x_0} M_1$.
