

סמסטר א', מועד דוגמה, תשע"ד
תאריך הבחינה: 2014
מספר קורס: 0366-2141

בחינה בחשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי 3
המורה: פרופ' בוריס צירלסון

משך הבחינה: 3 שעות.
מותר להשתמש בדף סיכום אישי.
בחרו 3 מתוך 4 השאלות הבאות.

בהצלחה!

שאלה 1

=25

תהי $U \subset \mathbb{R}^n$ קבוצה פתוחה ו- $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציה גזירה המקיימת $\nabla f = \text{const}$.

(א) אם U קשירה אז f שווה ב- U לפונקציה אפינית. הוכיחו.

.....
(ב) הטענה לא תמיד נכונה עבור U לא קשירה. הוכיחו ע"י דוגמה נגדית.

שאלה 2

=40

(א) תהי $U \subset \mathbb{R}^n$ קבוצה פתוחה, $a_1, \dots, a_m \in \mathbb{R}^n$, $c_1, \dots, c_m \in \mathbb{R}$,

$$\forall x \in U \forall k = 1, \dots, m \quad f_k(x) = \langle x, a_k \rangle + c_k > 0,$$

$$, p_1, \dots, p_m \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

$$\forall x \in U \quad f(x) = \prod_{k=1}^m (f_k(x))^{p_k}.$$

הוכיחו כי לכל $x \in U$ הוקטור $\nabla f(x)$ הוא צירוף לינארי של a_1, \dots, a_m עם מקדמים שונים מאפס.

.....

(ב) יהיו $a, b \in \mathbb{R}^n$ ב"ת לינארית, $|a| > 10$, $0 < |a - b| < 1$, יהי $\varphi(x)$ הזווית מ- x לקטע $[a, b]$, כלומר, $\langle a - x, b - x \rangle = |a - x||b - x| \cos \varphi$. הוכיחו קיום של $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$ (לא תלויים ב- x) כך ש-

$$\cos^2 \varphi(x) = \frac{(\langle x, \frac{a+b}{2} \rangle + c_1)^2}{(\langle x, a \rangle + c_2)(\langle x, b \rangle + c_3)}$$

לכל $x \in \mathbb{R}^n$ המקיים $|x| = 1$.

(ג) הוכיחו כי כל נקודת קיצון מקומית של φ ב- \mathbb{R}^n היא צירוף לינארי של a, b .

שאלה 3

=25

(א) הגרף של פונקציה אינטגרבילית בתיבה הוא קבוצה של נפח אפס. הוכיחו.

(ב) הגרף של פונקציה חסומה בתיבה הוא לא תמיד קבוצה של נפח אפס. הוכיחו ע"י דוגמה נגדית.

שאלה 4

=35

נגדיר $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ע"י

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n} \operatorname{sgn} \sin(2^n x), \quad \operatorname{sgn} a = \begin{cases} 1, & a > 0, \\ 0, & a = 0, \\ -1, & a < 0. \end{cases}$$

(א) הוכיחו אינטגרביליות ומצאו את האינטגרל:

$$\int_0^{2\pi/3} f(x) dx.$$

רמז: התכנסות במידה שווה.

(ב) הוכיחו אינטגרביליות ומצאו את האינטגרל:

$$\iint_{x^2+y^2 < 1} f\left(\frac{2\pi}{3}(x^2+y^2)\right) dx dy.$$