פרק ה': חזקת ω

5.1 הגדרה. בשדה סדור איברים x,y נקראים **מאותו סדר גודל** אם קיים r רציונלי חיובי כך ש- $x < ry$ ו- $y < rx$. במילים אחרות, x,y הם מאותו סדר גודל אם שניהם 0 או אם שניהם אינם 0 ו-$\frac{x}{y}$ סופי חיובי ואינו זעירון. ברור כי יחס זה הוא יחס שקילות, וגם יחס קירבה. למחלקות השקילות שלו, שהן בעליל רצפים, אנו קוראים **סידרי גודל**. בהתאם למה שאמרנו ב-4.7א' אנו מסמנים $x \sim y$ אם x,y מאותו סדר גודל, ובפרק הנוכחי נאמר אז כי x,y קרובים, $x << y$ אם $x < y$ והם אינם מאותו סדר גודל, ו- $x \leq^* y$ אם $x << y$ או $x \sim y$.

5.2 תכונות סידרי הגודל. א. $x \sim y$ אםם $x = y = 0$ או $\frac{x}{y}$ סופי חיובי ואינו זעירון.

ב. אם $x \sim 0$ אז $x = 0$. אם $x > 0$ אז $x \sim y$ אז $y > 0$. אם $x < 0$ אז $x \sim y$ אז $y < 0$

ג. אם A סדר גודל אז גם $-A = \{-a : a \in A\}$ הוא סדר גודל.

ד. אם $x \sim y$ אז $x + y \sim x$.

ה. אם r סופי חיובי ואינו זעירון (וכל מספר ממשי הוא כזה) אז $x \sim rx$.

ו. כל סדר גודל הוא רצף.

ז. אם A,B הם סידרי גודל נאמר כי $A < B$ אם לכל $a \in A$ ו- $b \in B$ קיים $a < b$. אם קיימים $a' \in A$ ו- $b' \in B$ כך ש- $a' < b'$ אז $A < B$.

ח. אם סכום סופי של מספרים הוא חיובי אז סדר הגודל שלו אינו עולה על סדר הגודל המירבי של המחוברים, ואם הסכום הוא שלילי אז סדר הגודל שלו אינו קטן מסדר הגודל המזערי של המחוברים.

ט. יהיו $a, b_1, \ldots, b_n$ איברים כך ש- $|b_1|, \ldots, |b_n| << |a|$. אז לכל r סופי חיובי שאינו זעירון $-r|a| < b_1 + \ldots + b_n < r|a|$.

י. ל- $a > 0$ קיים ש- $a \leq^* b$ אםם $\frac{x}{y}$ סופי חיובי, אםם $\frac{y}{x}$ חיובי ואינו זעירון.

י"א. אם $a \sim b$ אז $ac \sim bc$.

י"ב. אם $c > 0$ אז אם $a \leq^* b$ אז $ac \leq^* bc$ ואם $a << b$ אז $ac << ab$.

5.3 הגדרה. למספר כלשהו x נגדיר ברקורסיה $\omega^x = \{0, r\,\omega^{x^L} \mid r\,\omega^{x^R}\}$, כאשר r עובר על הממשיים החיוביים. על פניו, הערך של ω^x תלוי בהצגה המסויימת של x.

סימון. בפרק זה נסמן ב-R^+ את קבוצת הממשיים החיוביים וב-N את קבוצת המספרים הטבעיים החיוביים.

5.4 משפט. חזקת ω היא הרחבה של חזקת ω של הסודרים. במיוחד $\omega^0 = 1$ ו- $\omega^1 = \omega$.

הוכחה. נסמן ב- $\omega^\alpha_{\text{ord}}$ את חזקת ω של הסודרים וב- $\omega^\alpha_{\text{Con}}$ את חזקת ω של מספרי קונווי. נוכיח כי $\omega^\alpha_{\text{ord}} = \omega^\alpha_{\text{Con}}$ באינדוקציה על α. מכיוון ש- $\alpha = \{\beta : \beta < \alpha\} \mid \emptyset$ לכן, לפי 2.35ב',

$$\omega^\alpha_{\text{Con}} = \Big(\{0\} \cup \{r\omega^\beta_{\text{Con}} : r \in R^+, \beta < \alpha\}\Big) \mid \emptyset = \Big(\{0\} \cup \{n\omega^\beta_{\text{Con}} : n \in \omega, \beta < \alpha\}\Big) \mid \emptyset \qquad (1)$$

אם $\alpha = 0$ אז (1) הוא $\omega^0_{\text{Con}} = \{0\} \mid \emptyset = 1 = \omega^0_{\text{ord}}$. אם $\alpha > 0$ אז, לפי הנחת האינדוקציה וכפי שנאמר ב-4.27, אגף ימין של (1) הוא $\{\omega^\beta_{\text{ord}} \cdot n : n \in N, \beta < \alpha\} \mid \emptyset$, ולפי 2.42ג' זהו הסודר המזערי הגדול מכל הסודרים $\omega^\beta_{\text{ord}} \cdot n$ בהם $\beta < \alpha$ ו- $n \in N$, וסודר זה הוא $\omega^\alpha_{\text{ord}}$, כפי שהמשפט טוען.

5.5 משפט. למספרים x,y כלשהם:

א. ω^x הוא מספר חיובי, והוא המספר המוביל בסדר הגודל שלו.

ב. אם $x \equiv y$ אז $\omega^x \equiv \omega^y$.

ג. אם $x < y$ אז $\omega^x << \omega^y$.

הוכחה. נוכיח את א-ג באינדוקציה על יום הבריאה, כלומר נניח כי א-ג נכונים ל-x,y שנבראו לפני יום α ונוכיח אותם ל-x,y שנבראו לכל המאוחר ביום α.

א. לפי הנחת האינדוקציה א' כל ω^{x^L} וכל ω^{x^R} הוא מספר חיובי ולכן כל האופציות של ω^x, פרט ל-0, הן מספרים חיוביים. מכיוון ש-x מספר לכן $x^L < x^R$ ולכן, לפי הנחת האינדוקציה ג' $\omega^{x^L} << \omega^{x^R}$, כלומר לכל $r,s \in R^+$ קיים $0 < r\omega^{x^L} < s\omega^{x^R}$. כך ראינו שכל האופציות של ω^x הן מספרים, וכל אופציה שמאלית של ω^x קטנה מכל אופציה ימנית של ω^x ולכן ω^x הוא מספר.

מכיוון של- ω^x ישנה אופציה שמאלית 0 או אופציה שמאלית ω^{x^L} שהיא חיובית לפי הנחת האינדוקציה, ω^x הוא חיובי.

כל אופציה ימנית $r\omega^{x^R}$ של ω^x מקיימת $r\omega^{x^R} >> \omega^x$, כי אחרת היה קיים $n \in N$ כך ש- $n\omega^x > r\omega^{x^R}$ ולכן $\omega^x > \frac{r}{n}\omega^{x^R}$ בסתירה לכך ש- $\frac{r}{n}\omega^{x^R}$ היא אופציה ימנית של ω^x. כמו כן כל אופציה שמאלית $r\omega^{x^L}$ של ω^x מקיימת $r\omega^{x^L} << \omega^x$. ω^x מקיים את התנאי של 2.38.1ב' ולכן ω^x הוא המספר המוביל בסדר הגודל שלו.

ב. בגלל טרנזיטיביות השקילות אפשר להניח, ללא הגבלת הכלליות, ש-x טרי ואז, לפי משפט העטיפה ההפוך, y עוטף את x. אם נוכיח כי ω^y עוטף את ω^x נקבל פי משפט העטיפה, $\omega^x \equiv \omega^y$. לאופציה ימנית $r\omega^{x^R}$ של ω^x קיימת, מכיוון ש-y עוטף את x, אופציה ימנית y^R של y כך ש- $y^R \leq x^R$. לפי הנחת האינדוקציה $\omega^{y^R} \leq \omega^{x^R}$ ולכן לאופציה הימנית $r\omega^{x^R}$ של ω^x קיימת אופציה ימנית $r\omega^{y^R}$ של ω^y הקטנה או שווה לה. בדומה קיימת לכל אופציה שמאלית של ω^x אופציה שמאלית של ω^y הגדולה או שווה לה. לכן כדי לדעת ש- ω^y עוטף את ω^x, ואז לפי משפט העטיפה $\omega^y \equiv \omega^x$, אנו צריכים עוד לדעת ש- ω^x נמצא בין האופציות של ω^y.

נוכיח את זאת תחילה את הטענה למקרה ש- $\rho(x) < \alpha$. מכיוון ש- $x \equiv y$ קיים $y^L < x < y^R$ ובמקרה הנוכחי, לפי הנחת האינדוקציה ג', קיים $\omega^{y^L} << \omega^x << \omega^{y^R}$. מכיוון שגם ω^x חיובי קיבלנו ש-ω^x נמצא בין האופציות של ω^y וסיימנו.

במקרה ש- $\rho(x) = \alpha$ אז x ו-y שניהם מספרים טריים, ואז לפי משפט העטיפה ההפוך כל אחד מהם עוטף את חברו, ולפי הנחת האינדוקציה קבוצות האופציות השמאליות של ω^x ו-ω^y נגמרות יחד וקבוצות האופציות הימניות של ω^x ו-ω^y מתחילות יחד ולכן $\omega^x \equiv \omega^y$.

ג. נוכיח זאת באינדוקציה על הזוג $\rho(x), \rho(y)$. אם $x < y$ אז קיים y^L כך ש- $x \leq y^L$ או שקיים x^R כך ש- $x^R \leq y$. לפי ב' והנחת האינדוקציה $\omega^x \leq \omega^{y^L}$ או $\omega^{x^R} \leq \omega^y$. לכן o^x קטן או שווה לאופציה שמאלית של ω^y ו-ω^y גדול מאופציה ימנית של ω^x, ולכן $\omega^x < \omega^y$. מכיוון שלפי א' ω^x ו-ω^y הם מספרים מובילים והם שונים לכן הם אינם קרובים וקיים $\omega^x << \omega^y$.

5.6 משפט. כל מספר חיובי x הוא בעל אותו סדר גודל כמו ω^y למספר y כלשהו.

הוכחה. נוכיח את המשפט באינדוקציה על x. מכיוון ש- $x > 0$ קיים $x' \equiv x$ היכן ש-x' התקבל מ-x ע"י הוצאת כל האופציות השמאליות השליליות והוספת 0 כאופציה שמאלית, ולכן נניח ש-x עצמו הוא כזה, כלומר שהאופציות השמאליות של x הן 0 ומספרים חיוביים. אם $x \sim x^L$ או $x \sim x^R$ ל-x^L או ל-x^R כלשהו אז טענת המשפט נובעת מהנחת האינדוקציה. אחרת קיים $x^L << x << x^R$ לכל x^L ו-x^R. לפי הנחת האינדוקציה כל אופציה של x, פרט ל-0, היא קרובה ל-ω^z עבור מספר z כלשהו. תהי A הקבוצה המתקבלת ע"י שלכל x^L שאינו 0 אנו מכניסים ל-A מספר z כך ש- $x^L \sim \omega^z$, ותהי B הקבוצה המתקבלת ע"י שלכל x^R אנו מכניסים ל-B מספר z כך ש- $x^R \sim \omega^z$, מכיוון שקיים $x^L < x^R$ קיים $A < B$, ו- $y = A \mid B$ הוא מספר. נראה כי המספר ω^y עוטף את x ולכן $x = \omega^y$. ראשית נראה כי x נמצא בין האופציות של ω^y. האופציה השמאלית 0 של ω^y קטנה מ-x כי x חיובי. כל אופציה שמאלית אחרת של ω^y היא $r\omega^z$ הקרובה ל-x^L כלשהו ומכיוון ש-$x^L << x$ היא קטנה מ-x. בדומה, כל אופציה ימנית של ω^y גדולה מ-x. כעת נראה שהאופציות השמאליות של ω^y חוסמות מלעיל את האופציות השמאליות של x. ל-x^L כלשהו קיים, לפי הגדרת y, y^L כך ש- $\omega^{y^L} \sim x^L$, ולכן קיים ממשי חיובי r כך ש- $r\omega^{y^L} > x^L$, ו- $r\omega^{y^L}$ הוא אופציה שמאלית של ω^y. באותה הדרך רואים שהאופציות הימניות של ω^y חוסמות מלרע את האופציות הימניות של x. בכך סיימנו את ההוכחה ש-ω^y עוטף את x.

5.7 משפט. לכל x, y $\omega^{x+y} = \omega^x\omega^y$.

הוכחה. r ו-s יהיו בכל מקום בהוכחה הם מספרים ממשיים חיוביים.

$$\omega^x\omega^y = \{0, r\omega^{x^L} \mid s\omega^{x^R}\} \cdot \{0, r\omega^{y^L} \mid s\omega^{y^R}\}$$

והמכפלה היא, בהשמטת המחוברים שהם אפסים

$$\begin{aligned}&\{0, r\omega^{x^L}\omega^y + \omega^x s\omega^{y^L} - r\omega^{x^L}s\omega^{y^L}, r\omega^{x^L}\omega^y, \omega^x s\omega^{y^L}, r\omega^{x^R}\omega^y + \omega^x s\omega^{y^R} - r\omega^{x^R}s\omega^{y^R} \mid \\ &\qquad r\omega^{x^L}\omega^y + \omega^x s\omega^{y^R} - r\omega^{x^L}s\omega^{y^R}, \omega^x s\omega^{y^R}, r\omega^{x^R}\omega^y + \omega^x s\omega^{y^L} - r\omega^{x^R}s\omega^{y^L}, r\omega^{x^R}\omega^y\}\end{aligned}$$

לפי הנחת האינדוקציה המשפט קיים לזוגות x, y', x', y ו- x', y' היכן ש-x' הוא אופציה של x ו-y' הוא אופציה של y לכן השוויון לעיל נותן

$$\begin{aligned}\omega^x\omega^y =&\{0, r\omega^{x^L+y} + s\omega^{x+y^L} - rs\omega^{x^L+y^L}, r\omega^{x^L+y}, s\omega^{x+y^L}, r\omega^{x^R+y} + s\omega^{x+y^R} - rs\omega^{x^R+y^R} \mid \\ &r\omega^{x^L+y} + s\omega^{x+y^R} - rs\omega^{x^L+y^R}, s\omega^{x+y^R}, r\omega^{x^R+y} + s\omega^{x+y^L} - rs\omega^{x^R+y^L}, r\omega^{x^R+y}\}\end{aligned} \tag{2}$$

מצד שני קיים

$$\omega^{x+y} = \{0, r\omega^{x^L+y}, r\omega^{x+y^L} \mid r\omega^{x^R+y}, r\omega^{x+y^R}\} \tag{3}$$

נתבונן עתה באופציות של (2) ו-(3). נוכיח את השיוויון $\omega^{x+y} = \omega^x\omega^y$ ע"י שנעבור אחת לאחת על האופציות של (2) ושל (3) ונראה כי לכל אופציה שמאלית באחד המספרים (2) ו-(3) ישנה אופציה שמאלית גדולה או בחברו, ולכל אופציה ימנית באחד המספרים (2) ו-(3) ישנה אופציה ימנית קטנה יותר בחברו, ואז השיוויון קיים לפי 2.35ב'. נשתמש באופן חופשי ב-5.2 וב-5.5ג'.

א. $r\omega^{x^L+y} + s\omega^{x+y^L} - rs\omega^{x^L+y^L}$, כולל $r\omega^{x^L+y}$ ו- $s\omega^{x+y^L}$, ב-(2).

המספר $r\omega^{x^L+y}$, ואם $x^L + y \geq x + y^L$ אז גם המספר $r\omega^{x^L+y} + s\omega^{x+y^L} - rs\omega^{x^L+y^L}$, קטנים מן האופציה השמאלית $(r+s)\omega^{x^L+y}$ של (3).

המספר $s\omega^{x+y^L}$, ואם $x^L + y < x + y^L$ אז גם המספר $r\omega^{x^L+y} + s\omega^{x+y^L} - rs\omega^{x^L+y^L}$, קטנים מן האופציה השמאלית $(r+s)\omega^{x+y^L}$ של (3).

ב. $r\omega^{x^R+y} + s\omega^{x+y^R} - rs\omega^{x^R+y^R}$ ב-(2).

מספר זה הוא שלילי כי סדר הגודל של המחוסר בו גדול מסדרי הגודל של שני המחוברים, ולכן האופציה השמאלית 0 ב-(3) גדולה ממנו.

ג. $r\omega^{x^L+y} + s\omega^{x+y^R} - rs\omega^{x^L+y^R}$, כולל $s\omega^{x+y^R}$, ב-(2).

במספרים אלו סדר הגודל של המחובר $s\omega^{x+y^R}$ גדול מסדר הגודל של המחוסר ולכן האופציה השמאלית $\frac{s}{2}\omega^{x+y^R}$ של (3) קטנה מן המספרים.

ד. $r\omega^{x^R+y} + s\omega^{x+y^L} - rs\omega^{x^R+y^L}$, כולל $r\omega^{x^R+y}$, ב-(2). כמו ג' בהחלפת תפקידי x ו-y.

5.8 כפל הסודרים כמספרי קונווי. לפי 5.4 ו-5.7 קיים לסודרים α, β $\omega^\alpha \cdot \omega^\beta = \omega^{\alpha+\beta}$, היכן שכל הפעולות בשיוויון זה הן הפעולות של מספרי קונווי, ופעולת חזקת ω היא גם פעולת חזקת ω הרגילה בסודרים. לפי 4.17 כל סודר ניתן להצגה כסכום $\sum_{i=1}^k \omega^{\alpha_i} n_i$, היכן ש- $\alpha_1 > \alpha_2 > \ldots > \alpha_n$ וה-n_i-ים הם מספרים טבעיים. לפי 4.27 אפשר לראות בפעולות בסכום זה גם פעולות של מספרי קונווי. לכן אם $\alpha = \sum_{i=1}^k \omega^{\alpha_i} n_i$ ו- $\alpha' = \sum_{j=1}^{k'} \omega^{\alpha'_j} n'_j$ אז, כתוצאה מתכונות השדה, $\alpha \cdot \alpha' = \sum_{w=1}^m \omega^{\gamma_w} q_w$ היכן ש- $\gamma_1, \ldots, \gamma_m$ הם הסכומים $\alpha_i + \beta_j$ (חיבור כמספרי קונווי) בסדר יורד ולכל $1 \leq w \leq m$ $q_w = \sum_{\alpha_i+\alpha'_j=\gamma_w} n_i n_j$.

5.9 משפט. לכל r ממשי קיים $r\omega^x = \{s\omega^x : s < r\,,\, s \in R\} \mid \{s\omega^x : s > r\,,\, s \in R\}$.

רמז. חשב את $r\omega^x$ תוך שימוש בהצגות נוחות של r ושל ω^x והראה כי $\{s\omega^x : s < r\} \mid \{s\omega^x : s > r\}$ עוטף את התוצאה.

5.10 תרגיל. עבור אלו ערכים של המספר x והממשי r המספר $r\omega^x$ הוא עגול, ועבור אלו ערכים הוא תקני?

5.11 טור חזקות ω. לסדרה יורדת $\langle a_i : i < \beta\rangle$ של מספרים ולסדרה $\langle r_i : i < \beta\rangle$ של ממשיים נגדיר את $\sum_{i<\beta} r_i\omega^{a_i}$ ברקורסיה כדלקמן.

$\sum_{i<0} r_i\omega^{a_i} = 0$, $\sum_{i<\beta+1} r_i\omega^{a_i} = \sum_{i<\beta} r_i\omega^{a_i} + r_\beta\omega^{a_\beta}$,

ול-β גבולי $\sum_{i<\beta} r_i\omega^{a_i} = \{\sum_{i\leq\gamma} r_i\omega^{a_i} - r\omega^{a_\gamma} : \gamma < \beta, r \in R^+\} \mid \{\sum_{i\leq\gamma} r_i\omega^{a_i} + r\omega^{a_\gamma} : \gamma < \beta, r \in R^+\}$.

בכל פעם שנכתוב בהמשך $\sum_{i<\beta} r_i\omega^{a_i}$ נניח שה-a_i וה-r_i הן ככתוב לעיל.

5.12 משפט. א. $\sum_{i<\beta} r_i\omega^{a_i}$ מספר.

ב. הערכת הזנב: לכל $\gamma < \beta$ $|\sum_{i<\beta} r_i\omega^{a_i} - \sum_{i<\gamma} r_i\omega^{a_i}| \leq^* \omega^{a_\gamma}$. ג. $|\sum_{i<\beta} r_i\omega^{a_i}| \leq^* \omega^{a_0}$, ואם $r_0 \neq 0$ אז $|\sum_{i<\beta} r_i\omega^{a_i}| \sim \omega^{a_0}$.

הוכחה. נוכיח את א' ו-ב' יחד באינדוקציה על β. ל- $\beta = 0$ א' ו-ב' טריביאליים.

ל- $\beta = \lambda + 1$ א' נובע מיד מהנחת האינדוקציה ש- $\sum_{i<\lambda} r_i\omega^{a_i}$ מספר. כדי להוכיח את ב',

$$|\sum_{i<\beta} r_i\omega^{a_i} - \sum_{i<\gamma} r_i\omega^{a_i}| = |\sum_{i<\lambda} r_i\omega^{a_i} + r_\lambda\omega^{a_\lambda} - \sum_{i<\gamma} r_i\omega^{a_i}| \leq |\sum_{i<\lambda} r_i\omega^{a_i} - \sum_{i<\gamma} r_i\omega^{a_i}| + |r|\omega^{a_\lambda} \tag{4}$$

לפי הנחת האינדוקציה $|\sum_{i<\lambda} r_i\omega^{a_i} - \sum_{i<\gamma} r_i\omega^{a_i}| \leq^* \omega^{a_\gamma}$ אם $\lambda > \gamma$, ובוודאי שזה נכון אם $\lambda = \gamma$. כמו כן $|r|\omega^{a_\lambda} \leq^* \omega^{a_\gamma}$. לכן נובע מ-(4) ש- $|\sum_{i<\beta} r_i\omega^{a_i} - \sum_{i<\gamma} r_i\omega^{a_i}| \leq^* \omega^{a_\gamma}$.

ל- β גבולי, האופציות של ω^β הן מספרים, לפי הנחת האינדוקציה, וכדי להוכיח ש- ω^β מספר עלינו להראות כי לכל $\gamma,\delta<\beta$ ולכל $r,s\in R^+$ קיים $\sum_{i\le\gamma} r_i\omega^{a_i}-r\omega^{a_\gamma}<\sum_{i\le\delta} r_i\omega^{a_i}+s\omega^{a_\delta}$. נניח כי $\delta\le\gamma$. לפי הנחת האינדוקציה $|\sum_{i\le\delta} r_i\omega^{a_i}-\sum_{i\le\gamma} r_i\omega^{a_i}|\le^*\omega^{a_{\gamma+1}}<<r\omega^{a_\gamma}$ ולכן

$\sum_{i\le\gamma} r_i\omega^{a_i}-r\omega^{a_\gamma}<\sum_{i\le\gamma} r_i\omega^{a_i}-|\sum_{i\le\delta} r_i\omega^{a_i}-\sum_{i\le\gamma} r_i\omega^{a_i}|$
$\le\sum_{i\le\gamma} r_i\omega^{a_i}-(\sum_{i\le\gamma} r_i\omega^{a_i}-\sum_{i\le\delta} r_i\omega^{a_i})=\sum_{i\le\delta} r_i\omega^{a_i}<\sum_{i\le\delta} r_i\omega^{a_i}+s\omega^{a_\delta}$

אם $\gamma<\delta$ ההוכחה דומה. נוכיח עתה את הערכת הזנב ל-β. מכיוון שעבור $\gamma<\beta$ $\sum_{i\le\gamma} r_i\omega^{a_i}-r\omega^{a_\gamma}$ היא אופציה שמאלית של $\sum_{i<\beta} r_i\omega^{a_i}$ קיים

$\sum_{i<\beta} r_i\omega^{a_i}>\sum_{i\le\gamma} r_i\omega^{a_i}-r\omega^{a_\gamma}=\sum_{i<\gamma} r_i\omega^{a_i}+(r_\gamma-r)\omega^{a_\gamma}$ ולכן $-\omega^{a_\gamma}\le^*\sum_{i<\beta} r_i\omega^{a_i}-\sum_{i<\gamma} r_i\omega^{a_i}$.

מצד שני, מכיוון ש- $\sum_{i\le\gamma} r_i\omega^{a_i}+r\omega^{a_\gamma}$ היא אופציה ימנית של $\sum_{i<\beta} r_i\omega^{a_i}$ קיים

$\sum_{i<\beta} r_i\omega^{a_i}<\sum_{i\le\gamma} r_i\omega^{a_i}+r\omega^{a_\gamma}=\sum_{i<\gamma} r_i\omega^{a_i}+(r_\gamma+r)\omega^{a_\gamma}$ ולכן $\sum_{i<\beta} r_i\omega^{a_i}-\sum_{i<\gamma} r_i\omega^{a_i}\le^*\omega^{a_\gamma}$,

וביחד $|\sum_{i<\beta} r_i\omega^{a_i}-\sum_{i<\gamma} r_i\omega^{a_i}|\le^*\omega^{a_\gamma}$.

ג. השתמש בהערכת הזנב ל-$\gamma=0$ ול- $\gamma=1$ וב-5.2ט'.

5.13 הסדר המילוני של טורי החזקות. תהיינה $\langle\langle a_i,r_i\rangle:i<\beta\rangle$ ו- $\langle\langle a'_i,r'_i\rangle:i<\beta'\rangle$ שתי סדרות שבהן $\langle a_i:i<\beta\rangle$ ו- $\langle a'_i:i<\beta'\rangle$ הן סדרות יורדות של מספרים ו- r_i,r'_i ממשיים.

א. אם $j<\beta,\beta'$ הוא כך ש- $a'_j=a_j$ ו- $r'_j\neq r_j$, ולכל $i<j$ $a'_i=a_i$ ו- $r'_i=r_i$, אז $\sum_{i<\beta} r_i\omega^{a_i}<\sum_{i<\beta'} r'_i\omega^{a'_i}$ או $\sum_{i<\beta} r_i\omega^{a_i}>\sum_{i<\beta'} r'_i\omega^{a'_i}$ בהתאם לכך אם $r_j<r'_j$ או $r_j>r'_j$.

ב. אם $j<\beta$ הוא כך ש- $j=\beta'$ או $j<\beta'$ ו- $a'_j<a_j$, ולכל $i<j$ $a'_i=a_i$ ו- $r'_i=r_i$, אז $\sum_{i<\beta} r_i\omega^{a_i}<\sum_{i<\beta'} r'_i\omega^{a'_i}$ או $\sum_{i<\beta} r_i\omega^{a_i}>\sum_{i<\beta'} r'_i\omega^{a'_i}$ בהתאם לכך אם r_j שלילי או חיובי.

ג. אם כל ה-r_i-ים וה- r'_i-ים שונים מ-0 והסדרות $\langle\langle a_i,r_i\rangle:i<\beta\rangle$ ו- $\langle\langle a'_i,r'_i\rangle:i<\beta'\rangle$ שונות זו מזו, אז אחד הסכומים $\sum_{i<\beta} r_i\omega^{a_i}$ ו- $\sum_{i<\beta'} r'_i\omega^{a'_i}$ קטן מחברו, כאשר יחס הגודל ביניהם נקבע לפי א', או לפי ב' (כולל המקרה של היפוך התפקידים ב-ב').

הוכחה. א. נניח, לה"כ, כי $r_j<r'_j$.

$\sum_{i<\beta'} r'_i\omega^{a'_i}-\sum_{i<\beta} r_i\omega^{a_i}$
$=(\sum_{i\le j} r'_i\omega^{a'_i}-\sum_{i\le j} r_i\omega^{a_i})+(\sum_{i<\beta'} r'_i\omega^{a'_i}-\sum_{i\le j} r'_i\omega^{a'_i})-(\sum_{i<\beta} r_i\omega^{a_i}-\sum_{i\le j} r_i\omega^{a_i})$

מכיוון ש- $\sum_{i<j} r'_i\omega^{a'_i}=\sum_{i<j} r_i\omega^{a_i}$ לכן $\sum_{i\le j} r'_i\omega^{a'_i}-\sum_{i\le j} r_i\omega^{a_i}=(r'_j-r_j)\omega^{a_j}$, ולכן

$$\sum_{i<\beta'} r'_i\omega^{a'_i}-\sum_{i<\beta} r_i\omega^{a_i}=(r'_j-r_j)\omega^{a_j}+(\sum_{i<\beta'} r'_i\omega^{a'_i}-\sum_{i\le j} r'_i\omega^{a'_i})-(\sum_{i<\beta} r_i\omega^{a_i}-\sum_{i\le j} r_i\omega^{a_i}) \qquad (5)$$

אם $j+1<\beta,\beta'$ אז לפי הערכת הזנב $|\sum_{i<\beta} r_i\omega^{a_i}-\sum_{i\le j} r_i\omega^{a_i}|\le^*\omega^{a_{j+1}}$ ו- $|\sum_{i<\beta'} r'_i\omega^{a'_i}-\sum_{i\le j} r'_i\omega^{a'_i}|\le^*\omega^{a'_{j+1}}$, ואם $j+1=\beta$ או $j+1=\beta'$ אז $|\sum_{i<\beta} r_i\omega^{a_i}-\sum_{i\le j} r_i\omega^{a_i}|=0$ או $|\sum_{i<\beta'} r'_i\omega^{a'_i}-\sum_{i\le j} r'_i\omega^{a'_i}|=0$, ובכל מקרה $|\sum_{i<\beta} r_i\omega^{a_i}-\sum_{i\le j} r_i\omega^{a_i}|$ ו- $|\sum_{i<\beta'} r'_i\omega^{a'_i}-\sum_{i\le j} r'_i\omega^{a'_i}|$ הם בעלי סדר גודל קטן מ- ω^{a_j}. לכן אגף שמאל ב-(5) הוא חיובי כמו $(r'_j-r_j)\omega^{a_j}$.

ב. $\sum_{i<\beta'} r'_i\omega^{a'_i}-\sum_{i<\beta} r_i\omega^{a_i}$
$=(\sum_{i<j} r'_i\omega^{a'_i}-\sum_{i<j} r_i\omega^{a_i})+(\sum_{i<\beta'} r'_i\omega^{a'_i}-\sum_{i<j} r'_i\omega^{a'_i})-(\sum_{i<\beta} r_i\omega^{a_i}-\sum_{i\le j} r_i\omega^{a_i}+r_j\omega^{a_j})$.

ומכיוון ש- $\sum_{i<j} r'_i\omega^{a'_i}=\sum_{i<j} r_i\omega^{a_i}$ לכן

$\sum_{i<\beta'} r'_i\omega^{a'_i}-\sum_{i<\beta} r_i\omega^{a_i}=-r_j\omega^{a_j}+(\sum_{i<\beta'} r'_i\omega^{a'_i}-\sum_{i<j} r'_i\omega^{a'_i})-(\sum_{i<\beta} r_i\omega^{a_i}-\sum_{i\le j} r_i\omega^{a_i})$

כמו ב-א' שני המחוברים האחרונים בשוויון האחרון הם מסדר גודל קטן מ-ω^{a_j} (כי a'_j, אם הוא קיים, הוא קטן מ-a_j), ולכן הסימן של אגף שמאל נגדי לסימן r_j.

5.13.1 למה. אם $r_0\neq 0$ אז $\sum_{i<\alpha} r_i\omega^{a_i}\sim\omega^{a_0}$.

הוכחה. לפי 5.13א' אם r חיובי אז $\frac{r_0}{2}\omega^{a_0}<\sum_{i<\alpha} r_i\omega^{a_i}<2r_0\omega^{a_0}$, ואם r שלילי אז $2r_0\omega^{a_0}<\sum_{i<\alpha} r_i\omega^{a_i}<\frac{r_0}{2}o^{a_0}$.

5.14 תרגיל. א. $\sum_{i<\alpha} r_i\omega^{a_i}$ הוא זעירון אםם $a_0<0$.

ב. $\sum_{i<\alpha} r_i\omega^{a_i}$ הוא סופי אםם $a_0\le 0$.

רמז להוכחה. השתמש ב-5.13 כדי להשוות את $\sum_{i<\alpha} r_i\omega^{a_i}$ עם $r\omega^0$, עבור ממשיים r מתאימים.

5.15 הגדרה. לקבוצות סודרים A, B אנו אומרים ש-B **קופינלית** ב-A אם $B \subseteq A$ ולכל $\gamma \in A$ קיים $\delta \in B$ כך ש- $\gamma \le \delta$, ובמילים אחרות, $B \subseteq A$ ולא קיים $\gamma \in A$ הגדול מכל איברי B. מכיוון שכל סודר הוא קבוצת סודרים אז גם ההיגד "B קופינלית ב-α" הוא מוגדר.

5.16 למה. א. אם $\beta < \alpha$ ו- $r, s \in R^+$ אז $\sum_{i\le\beta} r_i\omega^{a_i} - r\omega^{a_\beta} < \sum_{i\le\alpha} r_i\omega^{a_i} - s\omega^{a_\alpha}$ ו- $\sum_{i\le\beta} r_i\omega^{a_i} + r\omega^{a_\beta} > \sum_{i\le\alpha} r_i\omega^{a_i} + s\omega^{a_\alpha}$.

ב. תהי A קבוצה קופינלית ב-α אז הקבוצות $\{\sum_{i\le\beta} r_i\omega^{a_i} - r\omega^{a_\beta} : \beta < \alpha, r \in R^+\}$ ו- $\{\sum_{i\le\beta} r_i\omega^{a_i} - r\omega^{a_\beta} : \beta \in A, r \in R^+\}$ נגמרות יחד והקבוצות $\{\sum_{i\le\beta} r_i\omega^{a_i} + r\omega^{a_\beta} : \beta < \alpha, r \in R^+\}$ ו- $\{\sum_{i\le\beta} r_i\omega^{a_i} + r\omega^{a_\beta} : \beta \in A, r \in R^+\}$ מתחילות יחד.

הוכחה. נשווה את $\sum_{i\le\beta} r_i\omega^{a_i} - r\omega^{a_\beta}$ עם $\sum_{i\le\alpha} r_i\omega^{a_i} - s\omega^{a_\alpha}$ בהשוואה מילונית. המקום הראשון בו סכומים אלו שונים הוא במחובר ה-β בו המקדם של ω^{a_β} ב- $\sum_{i\le\beta} r_i\omega^{a_i} - r\omega^{a_\beta}$ הוא $r_\beta - r$ וב- $\sum_{i\le\alpha} r_i\omega^{a_i} - s\omega^{a_\alpha}$ הוא r_b, ולכן, לפי 5.13א', $\sum_{i\le\beta} r_i\omega^{a_i} - r\omega^{a_\beta} < \sum_{i\le\alpha} r_i\omega^{a_i} - s\omega^{a_\alpha}$.
הוכחת אי-השיוויון השני במשפט היא דומה.

5.17 משפט. א. יהי $x = \sum_{i<\alpha} r_i\omega^{a_i}$, $a < a_i$ לכל $i < \alpha$ ו-r ממשי אז
$x + r\omega^a = \{x + s\omega^a : s < r, s \in R\} \mid \{x + t\omega^a : t > r, t \in R\}$.
ב. לכל α קיים

$$\sum_{i<\alpha} r_i\omega^{a_i} = \{\sum_{i\le\gamma} r_i\omega^{a_i} - r\omega^{a_\gamma} : \gamma < \alpha, r \in R^+\} \mid \sum_{i\le\gamma} r_i\omega^{a_i} + r\omega^{a_\gamma} : \gamma < \alpha, r \in R^+\} \tag{6}$$

.

ג. אם $r_i \neq 0$ לכל $i < \alpha$ ו- $\beta < \alpha$ אז $\rho(\sum_{i<\beta} r_i\omega^{a_i}) < \rho(\sum_{i<\alpha} r_i\omega^{a_i})$. לכן, בהנחה זאת $\rho(\sum_{i<\beta} r_i\omega^{a_i})$ היא פונקציה עולה של β ל- $\beta \le \alpha$.

הוכחה. א. נסמן ב-s משתנה העובר על הממשיים הקטנים מ-r וב-t משתנה העובר על הממשיים הגדולים מ-r. לפי 5.9, $r\omega^a = \{s\omega^a \mid t\omega^a\}$, ולכן

$$x + r\omega^a = \{x + s\omega^a, x^L + r\omega^a \mid x + t\omega^a, x^R + r\omega^a\} \tag{7}$$

. נוכיח את המשפט באינדוקציה על α, ובצעד האינדוקציה נוכיח את טענת המשפט ע"י שנוכיח כי

$$\{x + s\omega^a \mid x + t\omega^a\} \tag{8}$$

עוטף את (7). מכיוון ש-$x + r$ נמצא בין האופציות של (8) עלינו רק להוכיח את החלק השני של טענת העטיפה.
ל-$\alpha = 0$ טענת המשפט היא 5.9.
ל-α גבולי, אופציה שמאלית של x היא $x^L = \sum_{i\le\gamma} r_i\omega^{a_i} - w\omega^{a_\gamma}$ ל- $\gamma < \alpha$ ו- $w \in R^+$. האופציה השמאלית $x + s\omega^a$ של (7) היא גם אופציה שמאלית של (8). האופציה השמאלית $x^L + r\omega^a$ של (7) היא $\sum_{i\le\gamma} r_i\omega^{a_i} - w\omega^{a_\gamma} + r\omega^a$, עם $w \in R^+$, והיא קטנה מן האופציה השמאלית $x + s\omega^a$ של (8), לפי 5.13, כי שתיהן טורי חזקות ב-ω והמחובר הראשון בו הן נבדלות הוא המחובר של ω^{a_γ} שהמקדם שלו ב- $\sum_{i\le\gamma} r_i\omega^{a_i} - w\omega^{a_\gamma} + r\omega^a$ הוא $r_\gamma - w$ והמקדם שלו ב- $x + s\omega^a$ הוא r_γ (כי $a < a_\gamma$). האופציה הימנית $x + t\omega^a$ של (7) היא גם אופציה ימנית של (8). האופציה הימנית $x^R + r\omega^a$ של (7) היא $\sum_{i\le\gamma} r_i\omega^{a_i} + w\omega^{a_\gamma} + r\omega^a$, עם $w \in R^+$, והיא גדולה מן האופציה הימנית $x + t\omega^a$ של (7), לפי 5.13, כי שתיהן טורי חזקות ב-ω והמחובר הראשון בו הן נבדלות הוא המחובר של ω^{a_γ} שהמקדם שלו ב- $\sum_{i\le\gamma} r_i\omega^{a_i} + w\omega^{a_\gamma} + r\omega^a$ הוא $r_\gamma + w$ והמקדם שלו ב- $x + s\omega^a$ הוא r_γ (כי $a < a_\gamma$).
ל-α עוקב, יהי $\alpha = \beta + 1$, ואז, לפי הנחת האינדוקציה,
$\sum_{i<\alpha} r_i\omega^{a_i} = \{\sum_{i\le\beta} r_i\omega^{a_i} - w\omega^{a_\beta} \mid \sum_{i\le\beta} r_i\omega^{a_i} + w\omega^{a_\beta}\}$ ל- $w \in R^+$, ומכאן ההוכחה ממשיכה כמו במקרה של α גבולי.

ב. ל- $\alpha = 0$ זה טריביאלי. ל-α גבולי זאת הגדרת $\sum_{i<\alpha} r_i\omega^{a_i}$. ל-$\alpha$ עוקב יהי $\alpha = \beta + 1$. לפי הגדרת $\sum_{i<\beta+1} r_i\omega^{a_i}$ ולפי א' קיים

$$\sum_{i<\alpha} r_i\omega^{a_i} = \{\sum_{i\le\beta} r_i\omega^{a_i} - r\omega^{a_\beta} : r \in R^+\} \mid \{\sum_{i\le\beta} r_i\omega^{a_i} + r\omega^{a_\beta} : r \in R^+\} \tag{9}$$

הקבוצה $\{\beta\}$ קופינלית ב-α ולכן לפי 5.15ב' האופציות השמאליות ב-(6) וב-(9) נגמרות יחד, והאופציות הימניות ב-(6) וב-(9) מתחילות יחד ולכן, לפי 2.35ב', קיים השיוויון של המשפט.

ג. לפי ב'
$\sum_{i<\alpha} r_i\omega^{a_i} = \{\sum_{i\leq\gamma} r_i\omega^{a_i} - r\omega^{a_\gamma} : \gamma < \alpha, r \in R^+\} \mid \sum_{i\leq\gamma} r_i\omega^{a_i} + r\omega^{a_\gamma} : \gamma < \alpha, r \in R^+\}$, וגם $\sum_{i<\beta} r_i\omega^{a_i} = \{\sum_{i\leq\gamma} r_i\omega^{a_i} - r\omega^{a_\gamma} : \gamma < \beta, r \in R^+\} \mid \sum_{i\leq\gamma} r_i\omega^{a_i} + r\omega^{a_\gamma} : \gamma < \beta, r \in R^+\}$, לכן $\sum_{i<\alpha} r_i\omega^{a_i}$ נמצא בין האופציות של $\sum_{i<\beta} r_i\omega^{a_i}$. לפי 5.13ג' $\sum_{i<\alpha} r_i\omega^{a_i} \neq \sum_{i<\beta} r_i\omega^{a_i}$. לפי משפט הפשטות $\sum_{i<\beta} r_i\omega^{a_i}$ הוא המספר שנברא לפני כל מספר אחר הנמצא בין האופציות שלו ולכן $\rho(\sum_{i<\beta} r_i\omega^{a_i}) < \rho(\sum_{i<\alpha} r_i\omega^{a_i})$.

5.18 תרגיל. א. אם לכל $i < \alpha$ $a_i \geq 0$ אז $\sum_{i<\alpha} r_i\omega^{a_i}$ תיקני.

ב. אם קיים $i < \alpha$ כך ש- $a_i < 0$ יהי β ה-i המזערי הזה ואז $\mathrm{st}(\sum_{i<\alpha} r_i\omega^{a_i}) = \sum_{i<\beta} r_i\omega^{a_i}$ ו- $\sum_{i<\alpha} r_i\omega^{a_i}$ אינו תיקני.

ג. אם לכל $i < \alpha$ $a_i > 0$ אז $\sum_{i<\alpha} r_i\omega^{a_i}$ עגול.

ד. $\sum_{i<\alpha} r_i\omega^{a_i}$ הוא עגול אםם קיים לכל $i < \alpha$ $a_i \geq 0$, ולאותו i, אם יש כזה, עבורו $a_i = 0$ r_i הוא שלם.

רמז להוכחה. א. השתמש ב-5.17א'.

ב. השתמש בהערכת הזנב 5.12ב', כדי להוכיח כי $\sum_{i<\alpha} r_i\omega^{a_i}$ סמוך ל- $\sum_{i<\beta} r_i\omega^{a_i}$ ~, וב-א'.

ג. עבור $\sum_{i<\alpha} r_i\omega^{a_i} = x$ בחר את ההצגה שלו המתקבלת מ-5.17א' עם $\{a_i : i < \alpha\} \mid \{0\} = a$ ו- $r = 0$. הראה ש- $\{x - 1 \mid x + 1\}$ עוטף את ההצגה הזאת.

ד. השתמש ב-ג' וב-4.3ג' ו-ה'.

5.19 משפט. לכל מספר $x \neq 0$ קיימים מספרים y, z יחידים ומספר ממשי $r \neq 0$ יחיד כך ש- $x = r\omega^y + z$ ו- $|z| << |x|$. למספרים אלו קיים $\omega^y \sim |x|$.

הוכחה. לפי 5.6 קיים y כך ש- $\omega^y \sim |x|$, ולפי 5.5ג' y הוא יחיד. לפי הגדרת שיוויון סדר הגודל הזוג $\{s \in Q : s\omega^y < x\} \mid \{s \in Q : s\omega^y > x\} = c$ הוא חתך (ראה 4.10) ויהי $r = c^\flat$. נסמן $z = x - r\omega^y$, ונוכיח כי $|z| << |x|$. נניח כי $|z| \leq^* |x| \sim \omega^y$. אם z חיובי אז $z \leq^* \omega^y$ ולכן קיים רציונלי $t > 0$ כך ש- $z > t\omega^y$ ולכן $x = r\omega^y + z > r\omega^y + t\omega^y = (r+t)\omega^y$. כך קבלנו ש- $r + t$ הוא אופציה שמאלית של c בניגוד ל- $c^\flat = r$. אם z שלילי ההוכחה דומה.

גם z ו-r יחידים כי אם $x = r_1\omega^y + z_1 = r_2\omega^y + z_2$ ו- $|x| << |z_1|, |z_2|$ אז $(r_1 - r_2)\omega^y = z_2 - z_1$, ואם $r_1 \neq r_2$ אז, לפי 5.2ח', $|(r_1 - r_2)\omega^y| \sim \omega^y \sim |x| << |z_2 - z_1|$ בסתירה $(r_1 - r_2)\omega^y = z_2 - z_1$.

5.20 משפט ההצגה כטור חזקות ω. כל מספר x הוא סכום של טור חזקות ω $\sum_{i<\alpha} r_i\omega^{a_i}$ עם $\alpha \leq \rho(x)$ ו- $r_i \neq 0$ ל- $i < \alpha$.

הוכחה. לכל סודר β נגדיר מספר a_β וממשי r_β ברקורסיה עד שההגדרה תיעצר בסודר מסויים. במהלך ההגדרה נסמן $z_\beta = x - \sum_{i<\beta} r_i\omega^{a_i}$. במקביל להגדרת a_β נוכיח כי לכל $i < \beta$ $a_\beta < a_i$, כאשר הנחת האינדוקציה היא שלכל $i < j < \beta$ $a_j < a_i$. לפי הנחת האינדוקציה הסכום $\sum_{i<\alpha} r_i\omega^{a_i}$ מוגדר. אם $x = \sum_{i<\alpha} r_i\omega^{a_i}$ ההגדרה נעצר, ועיקר המשפט הוכח. אחרת, יהיו a_β, z המספרים ו- $r_\beta \neq 0$ המספר הממשי הקיימים לפי 5.19 והמקיימים $x - \sum_{i<\beta} r_i\omega^{a_i} = z_\beta = r_\beta\omega^{a_\beta} + z$, $\omega^{a_\beta} \sim |z_\beta| << |z|$, ו- $z_\beta \sim \omega^{a_\beta}$. קיים $z = x - \sum_{i<\beta} r_i\omega^{a_i} - r_\beta\omega^{a_\beta} = x - \sum_{i<\beta+1} r_i\omega^{a_i}$, וכך $z = z_{\beta+1}$ ו- $|z_\beta| << |z_{\beta+1}|$. כעת עלינו להוכיח כי $a_\beta < a_\gamma$ לכל $\gamma < \beta$.

$$\begin{aligned}\omega^{a_\beta} \sim |z_\beta| &= |x - \sum_{i<\beta} r_i\omega^{a_i}| \leq |x - \sum_{i<\gamma} r_i\omega^{a_i}| + |\sum_{i<\beta} r_i\omega^{a_i} - \sum_{i<\gamma} r_i\omega^{a_i}| \\ &= |z_\gamma| + |\sum_{i<\beta} r_i\omega^{a_i} - \sum_{i<\gamma} r_i\omega^{a_i}|\end{aligned} \tag{10}$$

לפי הגדרת a_γ קיים $\omega^{a_\gamma} \sim |z_\gamma|$. לפי הערכת הזנב, 5.12ב', $\omega^\gamma \leq^* |\sum_{i<\beta} r_i\omega^{a_i} - \sum_{i<\gamma} r_i\omega^{a_i}|$. לכן לפי 5.2ב' סדר הגודל של אגף ימין של (10) הוא לכל היותר ω^{a_γ} וכך (10) נותן $\omega^{a_\beta} \leq^* \omega^{a_\gamma}$ ולכן $a_\beta \leq a_\gamma$. אם $\gamma + 1 < \beta$, אז, מכיוון ש- $a_\beta \leq a_\gamma$ נכון לכל $\gamma < \beta$ זה נכון גם ל- $\gamma + 1$ וקיים $a_\beta \leq a_{\gamma+1}$. לפי הנחת האינדוקציה $a_{\gamma+1} < a_\gamma$,

ולכן $a_\beta < a_\gamma$. אם $\beta = \gamma+1$ אז, לפי הגדרת a_β ו-a_γ $\omega^{a_\beta} \sim z_\beta = z_{\gamma+1} << o^{a_\gamma}$, ולכן $a_\beta < a_\gamma$.

לכל β שעבורו a_β ו-r_β מוגדרים קיים $x - \sum_{i<\beta} r_i\omega^{a_i} = r_\beta\omega^{a_\beta} + z$, כאשר $|z| << \omega^{a_\beta}$, ולכן לכל $r \in R^+$ קיים $r_\beta\omega^{a_\beta} - r\omega^{a_\beta} < x - \sum_{i<\beta} r_i\omega^{a_i} < r_\beta\omega^{a_\beta} + r\omega^{a_\beta}$ ומכאן

$$\sum_{i\le\beta} r_i\omega^{a_i} - r\omega^{a_\beta} < x < \sum_{i\le\beta} r_i\omega^{a_i} + r\omega^{a_\beta} \tag{11}$$

לפי 5.15ב' קיים לכל γ שעבורו $\sum_{i<\gamma} r_i\omega^{a_i}$ מוגדר

$$\sum_{i<\gamma} r_i\omega^{a_i} = \{\sum_{i\le\beta} r_i\omega^{a_i} - r\omega^{a_\beta} : \beta<\gamma, r\in R^+\} \mid \{\sum_{i\le\beta} r_i\omega^{a_i} + r\omega^{a_\beta} : \beta<\gamma, r\in R^+\} \tag{12}$$

.

לפי (11) x נמצא בין האופציות של $\sum_{i<\gamma} r_i\omega^{a_i}$ ב-(12), לכן לפי משפט הפשטות, אם $x \neq \sum_{i<\gamma} r_i\omega^{a_i}$ אז $\rho(x) > \rho(\sum_{i<\gamma} r_i\omega^{a_i})$. מכיוון שלפי 5.17ג' $\rho(\sum_{i<\gamma} r_i\omega^{a_i})$ היא פונקציה עולה של γ קיים לכל γ שעבורו $\sum_{i<\gamma} r_i\omega^{a_i}$ מוגדר $\gamma \le \rho(\sum_{i<\gamma} r_i\omega^{a_i})$ ולכן קיים $\alpha \le \rho(x)$ כך ש- $x = \sum_{i<\alpha} r_i\omega^{a_i}$, ובכך הוכח המשפט.

כעת נביא מספר למות שתאפשרנה לנו טיפול נוח בטורי חזקות ω. בלמה הראשונה נראה שאם אנו מכניסים בין המחוברים בטור חזקות ω חזקות ω נוספות עם מקדמים שהם 0 אז איננו משנים את סכום הטור.

5.21 למה. תהי f פונקציה, $f : \alpha \to \beta$, תהיינה $\langle a_i : i<\alpha\rangle$ ו- $\langle b_j : j<\beta\rangle$ סדרות יורדות של מספרים ו- $\langle r_i : i<\alpha\rangle$ ו- $\langle s_j : j<\beta\rangle$ סדרות של מספרים ממשיים כך שלכל $i<\alpha$ $a_i = b_{f(i)}$ ו- $s_{f(i)} = r_i$, ולכל $j<\beta$ שאינו בטווח של f $s_j = 0$. אז $\sum_{i<\alpha} r_i\omega^{a_i} = \sum_{j<\beta} s_j\omega^{b_j}$.

הוכחה. באינדוקציה על β. אם $\beta = 0$ אז בהכרח $\alpha = 0$ וטענת הלמה היא $0 = 0$.

אם β עוקב יהי $\beta = \beta'+1$. אם β' אינו בטווח f אז לפי הנחת המשפט $s_{b'} = 0$ ולכן

$\sum_{j<\beta} s_j\omega^{b_j} = \sum_{j<b'} s_j\omega^{b_j} + s_{b'}\omega^{b_{\beta'}} = \sum_{j<b'} s_j\omega^{b_j}$

ולפי הנחת האינדוקציה $= \sum_{i<\alpha} r_i\omega^{a_i}$

אם β' בטווח f אז α הוא עוקב ואז $\alpha = \alpha'+1$ ו- $f(\alpha') = \beta'$ ואז $b_{\beta'} = a_{\alpha'}$ ו- $s_{\beta'} = r_{\alpha'}$,

וקיים $\sum_{j<\beta} s_j\omega^{b_j} = \sum_{j<b'} s_j\omega^{b_j} + s_{b'}\omega^{b_{\beta'}}$

ולפי הנחת האינדוקציה, מכיוון שהפונקציה $f' : \alpha' \to \beta'$ שהיא ההגבלה של f ל-α' ממלאת אחר תנאי הלמה,

$= \sum_{i<\alpha'} r_i\omega^{a_i} + r_{\alpha'}\omega^{a_{\alpha'}} = \sum_{i<\alpha} r_i\omega^{a_i}$

אם β גבולי וטווח f אינו קופינלי ב-β אז יהי $\gamma < \beta$ הסודר המזערי הגדול מכל איברי טווח f ואז $s_j = 0$ לכל $\gamma \le j < \beta$. נסמן $x = \sum_{i<\alpha} r_i\omega^{a_i}$. לפי הנחת האינדוקציה קיים לכל $\gamma \le \delta < \beta$ $x = \sum_{j<\delta} s_j\omega^{b_j}$. לכן קיים במיוחד, לפי 5.17א' (עם $r=0$),

$$x = \sum_{j<\gamma} s_j\omega^{b_j} = \{x - r\omega^{b_\gamma} : r\in R^+\} \mid \{x + r\omega^{b_g} : r\in R^+\} \tag{13}$$

לפי הגדרת סכום הטור ולפי 5.16ב' קיים

$\sum_{j<\beta} s_j\omega^{b_j} = \{\sum_{j\le\delta} s_j\omega^{b_j} - r\omega^{b_\delta} : \gamma\le\delta<\beta\,,\, r\in R^+\} \mid \sum_{j\le\delta} s_j\omega^{b_j} + r\omega^{b_\delta} : \gamma\le\delta<\beta\,,\, r\in R^+\}$
$= \{x - r\omega^{b_\delta} : \gamma\le\delta<\alpha\,,\, r\in R^+\} \mid \{x + r\omega^{b_\delta} : \gamma\le\delta<\alpha\,,\, r\in R^+\}$

הצגה זאת של $\sum_{j<\alpha} s_j\omega^{b_j}$ עוטפת את (13) ולכן $\sum_{j<\beta} s_j\omega^{b_j} = x$.

אם β גבולי וטווח f קופינלי ב-β אז, לפי הגדרת סכום הטור ולפי 5.16ב',

$\sum_{j<\alpha} s_j\omega^{b_j} = \{\sum_{j\le f(\delta)} s_j\omega^{b_j} - r\omega^{b_{f(\delta)}} : \delta<\alpha\,,\, r\in R^+\} \mid \{\sum_{j\le f(\delta)} s_j\omega^{b_j} + r\omega^{b_{f(\delta)}} : \delta<\alpha\,,\, r\in R^+\}$

לכל $\delta < \alpha$ הפונקציה $f' : \delta+1 \to f(\delta)+1$ שהיא ההגבלה של f ל-$\delta+1$ ממלאת אחר תנאי הלמה ולכן, לפי הנחת האינדוקציה, $\sum_{j\le f(\delta)} s_j\omega^{b_j} = \sum_{i\le f(\delta)} r_i\omega^{a_i}$. כתוצאה מכך, ומכיוון ש- $b_{f(\delta)} = a_\delta$, השיוויון לעיל נותן

$$\sum_{j<\alpha} s_j\omega^{b_j} = \{\sum_{i\le\delta} r_i\omega^{a_i} - r\omega^{a_\delta} : \delta<\alpha\,,\, r\in R^+\} \mid \{\sum_{i\le\delta} r_i\omega^{a_i} + r\omega^{a_\delta} : \delta<\alpha\,,\, r\in R^+\} = \sum_{i<\alpha} r_i\omega^{a_i}$$

5.22 למה. $\sum_{i<\alpha} r_i\omega^{a_i} + \sum_{i<\alpha} s_i\omega^{a_i} = \sum_{i<\alpha}(r_i+s_i)\omega^{a_i}$.

הערה. כאשר מחברים שני טורים כך שלא לכל מחובר $r\omega^\rho$ המופיע באחד הטורים מופיע גם בטור השני מחובר עם ω^ρ, אז אפשר, לאור 5.21, להוסיף לטור השני את המחובר $0\omega^\rho$ והמחובר המתאים בטור הסכום הוא $r\omega^\rho$. כאשר מוסיפים לשני הטורים את המחוברים הדרושים מתקבלים שני טורים באותו אורך.

הוכחה. באינדוקציה על α. ל-$\alpha = 0$ זה טריביאלי, ול-α עוקב זה נובע מיידית מהנחת האינדוקציה, שהלמה נונה לקודם של α ומתכונת הפילוג של הכפל ביחס לחיבור.

ל-α גבולי נראה שהאופציות השמאליות של שני אגפי הלמה נגמרות יחד והאופציות הימניות מתחילות יחד. לאור הסימטריה בין שני המחוברים באגף שמאל ובין האופציות השמאליות והימניות די לנו להשוות את האופציות השמאליות של $\sum_{i<\alpha} r_i\omega^{a_i} + \sum_{i<\alpha} s_i\omega^{a_i}$

$$(\sum_{i\leq\beta} r_i\omega^{a_i} - r\omega^{a_\beta}) + \sum_{i<\alpha} s_i\omega^{a_i} \tag{14}$$

עם $\beta < \alpha$ ו- $r \in R^+$, עם האופציות השמאליות של $\sum_{i<\alpha}(r_i+s_i)\omega^{a_i}$

$$\sum_{i\leq\beta}(r_i+s_i)\omega^{a_i} - r\omega^{a_\beta} \tag{15}$$

(14) שווה ל-

$$\sum_{i\leq\beta} r_i\omega^{a_i} + \sum_{i\leq\beta} s_i\omega^{a_i} - r\omega^{a_\beta} + \sum_{i<\alpha} s_i\omega^{a_i} - \sum_{i\leq\beta} s_i\omega^{a_i} \tag{16}$$

לפי הנחת האינדוקציה, סכום שלושת המחוברים הראשונים ב-(16) הוא (15). לפי הערכת הזנב, סכום שני המחוברים הימניים ב-(15) הוא בערכו המוחלט אינו עולה על סדר הגודל של $\omega^{a_\beta+1}$ ולכן הוא $<< \omega^{\alpha_b}$. לכן לכל אופציה (14) הגדלה כלשהי של r ב-(15) נותנת, לפי 5.2ט', מספר גדול יותר מן המספר ב-(14), ולכל אופציה (15) הגדלה כלשהי של r ב-(14) נותנת מספר גדול יותר מן המספר ב-(15). זה מספיק כדי להוכיח שהאופציות השמאליות של שני אגפי השוויון בלמה נגמרות יחד.

5.23 למה. ל- $\beta < \alpha$ $\sum_{i<\alpha} r_i\omega^{a_i} = \sum_{i<\beta} r_i\omega^{a_i} + \sum_{\beta\leq i<\gamma} r_i\omega^{a_i}$.

הוכחה. נגדיר ל- $i < \beta$ $s_i = r_i$ ו- $t_i = 0$ ול- $\beta \leq i < \alpha$ $s_i = 0$ ו- $t_i = r_i$. לפי 5.22 $\sum_{i<\alpha} r_i\omega^{a_i} = \sum_{i<\alpha} s_i\omega^{a_i} + \sum_{i<\alpha} t_i\omega^{a_i}$, ולפי 5.21 זה שווה ל- $\sum_{i<\beta} r_i\omega^{a_i} + \sum_{\beta\leq\gamma} r_i\omega^{a_i}$.

5.24 למה. $\omega^b \cdot \sum_{i<\alpha} r_i\omega^{a_i} = \sum_{i<\alpha} r_i\omega^{b+a_i}$.

הוכחה. באינדוקציה על α. ל- $\alpha = 0$ השיוויון טריביאלי. ל-α עוקב, $\alpha = \alpha' + 1$, השיוויון נובע ישירות מהנחת האינדוקציה שהשיוויון קיים ל-α' ומ-5.7.

ל-α גבולי, תחילה נשווה את האופציות השמאליות של $\sum_{i<\alpha} r_i\omega^{b+a_i}$

$$\sum_{i\leq\beta} r_i\omega^{b+a_i} - r\omega^{b+a_\beta} \tag{17}$$

עם $\beta < \alpha$ ו- $r \in R^+$, עם האופציות השמאליות של $\omega^b \sum_{i<\alpha} r_i\omega^{a_i}$

$$\omega^b(\sum_{i\leq\beta} r_i\omega^{a_i} - r\omega^{a_\beta}) + \omega^{b^L}\sum_{i<\alpha} r_i\omega^{a_i} - \omega^{b^L}(\sum_{i\leq\beta} r_i\omega^{a_i} - r\omega^{a_\beta}) \tag{18}$$

$$\omega^b(\sum_{i\leq\beta} r_i\omega^{a_i} - r\omega^{a_\beta}) \tag{19}$$

$$\omega^b(\sum_{i\leq\beta} r_i\omega^{a_i} + r\omega^{a_\beta}) + \omega^{b^R}\sum_{i<\alpha} r_i\omega^{a_i} - \omega^{b^R}(\sum_{i\leq\beta} r_i\omega^{a_i} + r\omega^{a_\beta}) \tag{20}$$

לפי הנחת האינדוקציה, (19) שווה ל-(17). לכן האופציות השמאליות של $\omega^b \sum_{i<\alpha} r_i\omega^{a_i}$ חוסמות מלעיל את האופציות השמאליות של $\sum_{i<\alpha} r_i\omega^{b+a_i}$, ולגבי האופציות השמאליות נותר לנו להוכיח שהאופציות השמאליות של $\sum_{i<\alpha} r_i\omega^{b+a_i}$ חוסמות מלעיל את האופציות השמאליות של $\omega^b \sum_{i<\alpha} r_i\omega^{a_i}$.

סכום שני המחוברים הימניים ב-(18) שווה ל-

$$\omega^{b^L}\left(\sum_{i<\alpha} r_i\omega^{a_i} - \sum_{i\le\beta} r_i\omega^{a_i}\right) + r\omega^{b^L+a_\beta} \tag{21}$$

מבין שני מחוברים אלו הכופל הימני של המחובר הראשון הוא בערכו המוחלט, לפי הערכת הזנב, $\omega^{a_\beta} >>$, ולכן לפי 5.2י"ב, המחובר הראשון ב-(21) הוא בערכו המוחלט $\omega^{b^L+a_\beta} >> \omega^{b+a_\beta} >>$. ברור גם שהמחובר השני ב-(21) הוא בערכו המוחלט $\omega^{b+a_\beta} >>$. לפי הנחת האינדוקציה המחובר השמאלי ב-(18) הוא (17) ולפי 5.2ט' אם ניקח ב-(17) במקום r r' ממשי חיובי הקטן מ-r נקבל ב-(17) מספר הגדול מ-(18). כעת נוכיח כי ב-(20) סכום שני המחוברים הימניים הוא שלילי, ומכיוון שהמחובר השמאלי שווה, לפי הנחת האינדוקציה, למספר ב-(17), אז המספר ב-(17) גדול מן המספר ב-(20). סכום שני המחוברים הימניים ב-(20) הוא

$$\omega^{b^R}\left(\sum_{i<\alpha} r_i\omega^{a_i} - \sum_{i\le\beta} r_i\omega^{a_i}\right) - r\omega^{b^R+a_\beta} \tag{22}$$

בדומה למה שעשינו עם (21), המחובר הראשון ב-(22) הוא בערכו המוחלט $\omega^{b^R+a_\beta} >>$ והשני הוא מספר שלילי שבערכו המוחלט הוא מסדר הגודל של $\omega^{b^R+a_\beta}$ ולכן לפי 5.2ט', סכומם הוא שלילי.

כעת נשווה את האופציות הימניות של $\sum_{i<\alpha} r_i\omega^{b+a_i}$

$$\sum_{i\le\beta} r_i\omega^{b+a_i} + r\omega^{b+a_\beta} \tag{23}$$

עבור $\beta < \alpha$ ו- $r \in R^+$, עם האופציות הימניות של $\omega^b \sum_{i<\alpha} r_i\omega^{a_i}$

$$\omega^b\left(\sum_{i\le\beta} r_i\omega^{a_i} + r\omega^{a_\beta}\right) + \omega^{b^L}\sum_{i<\alpha} r_i\omega^{a_i} - \omega^{b^L}\left(\sum_{i\le\beta} r_i\omega^{a_i} + r\omega^{a_\beta}\right) \tag{24}$$

$$\omega^b\left(\sum_{i\le\beta} r_i\omega^{a_i} - r\omega^{a_\beta}\right) + \omega^{b^R}\sum_{i<\alpha} r_i\omega^{a_i} - \omega^{b^R}\left(\sum_{i\le\beta} r_i\omega^{a_i} - r\omega^{a_\beta}\right) \tag{25}$$

סכום שני המחוברים הימניים ב-(24) הוא

$$\omega^{b^L}\left(\sum_{i<\alpha} r_i\omega^{a_i} - \sum_{i\le\beta} r_i\omega^{a_i}\right) - r\omega^{b^L+a_\beta} \tag{26}$$

וב-(26), כפי שראינו לעיל לגבי (20), סדר הגודל של המחובר הימני השלילי גדול בערכו המוחלט מזה של המחובר השמאלי, ולכן הסכום שלילי. לפי הנחת האינדוקציה המחובר השמאלי ב-(24) הוא (23), ולכן (24) חוסם מלרע את (23), ובכך כבר הוכחנו שהאופציות הימניות של $\omega^b \sum_{i<\alpha} r_i\omega^{a_i}$ חוסמות מלרע את האופציות הימניות של $\sum_{i<\alpha} r_i\omega^{b+a_i}$, ולגבי האופציות הימניות נותר לנו להוכיח שהאופציות הימניות של $\sum_{i<\alpha} r_i\omega^{b+a_i}$ חוסמות מלרע את האופציות הימניות של $\omega^b \sum_{i<\alpha} r_i\omega^{a_i}$.

סדר הגודל של (26) הוא, בערך מוחלט, $\omega^{b^L+a_\beta}$ הקטן מ- ω^{b+a_β}, ולכן, לפי 5.2ט', אם נחליף ב-(23) את r ב-r' ממשי חיובי הקטן ממנו נקבל מספר הקטן מ-(24). נכתוב עתה את (25) תוך שימוש בהנחת האינדוקציה ותכונות פעולות החיבור, הכפל וחזקת ω.

$$\sum_{i\le\beta} r_i\omega^{b+a_i} - r\omega^{b+a_\beta} + \omega^{b^R}\left(\sum_{i<\alpha} r_i\omega^{a_i} - \sum_{i\le\beta} r_i\omega^{a_i}\right) + r\omega^{b^R+a_\beta} \tag{27}$$

המחובר הראשון ב-(27) הוא המחובר הראשון ב-(23). נתבונן בסידרי הגודל של הערכים המוחלטים של יתר המחוברים של (23) ו-(27). סדר הגודל של המחובר הימני ב-(23) הוא ω^{b+a_β}, וסידרי הגודל, בערך מוחלט, של שלושת המחוברים הימניים ב-(27) הם, לפי הסדר משמאל לימין, ω^{b+a_β}, $>>$ $\omega^{b^R+a_\beta}$ (לפי הערכת הזנב ו-5.12י') ו- $\omega^{b^R+a_\beta}$. לכן מכל המחוברים הללו בעל סדר הגודל שהוא גדול מסידרי הגודל של שאר המחוברים הוא המחובר הימני החיובי של (27), ולכן (25) גדול מ-(23).

5.25 המכפלה הפורמלית של טורי חזקות. המכפלה הפורמלית של טורי החזקות $\sum_{i<\alpha} r_i\omega^{a_i}$ ו- $\sum_{j<\beta} s_j\omega^{b_j}$ היא טור החזקות $\sum_{k<\gamma} t_k\omega^{c_k}$ כך ש- $\{c_k : k < \gamma\} = \{a_i : i < \alpha\} \cup \{b_j : j < \beta\}$ ולכל $k < \gamma$ $\sum_{a_i+b_j=c_k} r_is_j$. כדי לדעת שמכפלה פורמלית של שני טורי חזקות היא טור חזקות עלינו לדעת כי היחס $<$ הוא סדר טוב על הקבוצה $\{a_i + b_j : i < \alpha\, ,\, j < \beta\}$, וכי לכל $k < \gamma$ מספר הזוגות $\langle i, j\rangle$ עבורם $a_i + b_j = c_k$ הוא סופי, וזה מוכח בלמה הבאה.

5.25 למה. אם הסדרות $\langle a_i : i < \alpha\rangle$ ו- $\langle b_j : j < \beta\rangle$ הן יורדות אז:
א. הסדר היורד מסדר היטב את הקבוצה $\{a_i + b_j : i < \alpha\, ,\, j < \beta\}$.
ב. לכל מספר c יש רק מספר סופי של זוגות $\langle i, j\rangle$ עבורם $a_i + b_j = c$.

הוכחה. א. נניח שלא, אז קיימת סדרה עולה $\langle a_{i_k} + b_{j_k} : k \in \omega\rangle$. אם הקבוצה $\{i_k : k \in \omega\}$ היא אינסופית אז יש לסדרה $\langle i_k : k \in \omega\rangle$ תת-סדרה עולה, ולכן, לה"כ, אנו רשאים להניח שהסדרה $\langle i_k : k \in \omega\rangle$ עצמה היא עולה, ולכן הסדרה $\langle a_{i_k} : k \in \omega\rangle$ היא יורדת. אם הקבוצה $\{i_k : k \in \omega\}$ היא סופית אז יש לסדרה $\langle i_k : k \in \omega\rangle$ תת- סדרה בה i_k קבוע ולה"כ אנו רשאים להניח שכל ה-i_k הם אותו הסודר, ולכן הסדרה $\langle a_{i_k} : k \in \omega\rangle$ היא סדרה קבועה. לכן, בכל מקרה הגענו לסדרה $\langle a_{i_k} : k \in \omega\rangle$ שהיא לא עולה. מכיוון שהסדרה $\langle a_{i_k} + b_{j_k} : k \in \omega\rangle$ עולה לכן הסדרה $\langle b_{j_k} : k \in \omega\rangle$ היא סדרה עולה ולכן הסדרה $\langle j_k : k \in \omega\rangle$ היא סדרת סודרים יורדת, וזה לא יתכן.

ב. נניח שיש מספר אינסופי של זוגות $\langle i, j\rangle$ עבורם $a_i + b_j = c$. ברור כי לכל i יש לכל היותר j אחד כך ש- $a_i + b_j = c$, נסמן את ה-j הזה ב-$j(i)$. לכן יש מספר אינסופי של i-ים כך ש- $a_i + b_{j(i)} = c$, ולכן קי-ימת סדרה $\langle i_k : k \in \omega\rangle$ עולה של i-ים כאלו. לכן הסדרה $\langle a_{i_k} : k \in \omega\rangle$ יורדת ולכן הסדרה $\langle b_{j(i_k)} : k \in \omega\rangle$ עולה, והסדרה $\langle j(i_k) : k \in \omega\rangle$ היא סדרת סודרים יורדת, וזה לא יתכן.

5.26 משפט. המכפלה של הסכומים של שני טורי חזקות ω שווה לסכום של טור המכפלה הפורמלית שלהם.

הוכחה. נוכיח זאת למכפלה $\left(\sum_{i<\alpha} r_i\omega^{a_i}\right)\left(\sum_{j<\beta} s_j\omega^{b_j}\right)$ באינדוקציה על הזוג α, β. את המכפלה הפורמלית נסמן ב- $\sum_{k<\sigma} p_k\omega^{e_k}$, כאשר $\{e_k : k < \sigma\} = \{a_i + b_j : i < \alpha, j < \beta\}$. ל- $\alpha = \beta = 0$ השוויון טריביאלי.
אם אחד הסודרים α, β הוא עוקב, נניח $\alpha = \alpha' + 1$ ואז

$$\sum_{i<\alpha} r_i\omega^{a_i} \cdot \sum_{j<\beta} s_j\omega^{b_j} = \sum_{i<\alpha'} r_i\omega^{a_i} \cdot \sum_{j<\beta} s_j\omega^{b_j} + r_{\alpha'}\omega^{a_{\alpha'}} \sum_{j<\beta} s_j\omega^{b_j}$$

ולפי הנחת האינדוקציה ו-5.24

$$= \sum_{k<\gamma} t_k\omega^{c_k} + \sum_{j<\beta} r_{\alpha'} s_j\omega^{a_{\alpha'}+b_j}$$

היכן ש- $\sum_{k<\gamma} t_k\omega^{c_k}$ היא המכפלה הפורמלית של $\sum_{i<\alpha'} r_i\omega^{a_i}$ ו- $\sum_{j<\beta} s_j\omega^{b_j}$. לפי 5.22 סכום זה שווה לסכום איבר איבר של שני טורים אלו, שנסמנו ב- $\sum_{k<\delta} q_k\omega^{d_k}$. זה כולל האפשרות שלמחוברים מסויימים בטור אחד אין מחוברים מתאימים בטור השני, נוכיח עתה כי $\sum_{k<\sigma} p_k\omega^{e_k} = \sum_{k<\delta} q_k\omega^{d_k}$. לפי הגדרת המכפלה הפורמלית מעריך e_k הוא $a_i + b_j$ עבור $i < \alpha$ ו- $j < \beta$ כלשהם, ואם עבור i, j כאלו $i = \alpha'$ נסמן את ה-j המתאים ב-λ. לכל $k < \sigma$ נפריד בין שלושה מקרים.

מקרה א': רק הזוג $i = \alpha'$ ו- $j = \lambda$ מקיים את $e_k = a_i + b_j$. במקרה זה קיים $p_k = r_{\alpha'} s_\lambda$, ולא קיימים $i < \alpha'$ ו- $j < \beta$ המקיימים את $e_k = a_i + b_j$. לכן e_k אינו החזקה של מחובר כלשהו בטור $\sum_{k<\gamma} t_k\omega^{c_k}$, והמקדם של $\omega^{e_k} = \omega^{a_{\alpha'} b_\lambda}$ בטור $\sum_{j<\beta} r_{\alpha'} s_j\omega^{a_{\alpha'}+b_j}$ הוא $r_{\alpha'} s_\lambda = p_k$.

מקרה ב': לכל זוג i, j המקיים את $e_k = a_i + b_j$ קיים $i \neq \alpha'$. במקרה זה אין בטור $\sum_{j<\beta} r_{\alpha'} s_j\omega^{a_{\alpha'}+b_j}$ מחובר עם החזקה e_k ולכן קיים $p_k = \sum_{i<\alpha, j<\beta, a_i+b_j=e_k} r_is_j = \sum_{i<\alpha', j<\beta, a_i+b_j=e_k} r_is_j$, וזהו המקדם של ω^{e_k} בטור $\sum_{k<\gamma} t_k\omega^{c_k}$.

מקרה ג': הזוג $i = \alpha'$ ו- $j = \lambda$ וזוגות i, j נוספים מקיימים את $e_k = a_i + b_j$. במקרה זה $p_k = \sum_{i<\alpha, j<\beta, a_i+b_j=e_k} r_is_j = \sum_{i<\alpha', j<\beta, a_i+b_j=e_k} r_is_j + r_{\alpha'} s_\lambda$, וזהו הסכום של המקדמים של ω^{e_k} בטורים $\sum_{k<\gamma} t_k\omega^{c_k}$ ו- $\sum_{j<\beta} r_{\alpha'} s_j\omega^{a_{\alpha'}+b_j}$.

כדי לסיים את הוכחת שלב האינדוקציה במקרה זה עלינו להראות שכל מחובר $q_k\omega^{d_k}$ מופיע גם במכפלה הפורמלית, ועלינו רק למצוא שם את ω^{d_k} כי למחוברים המופיעים במכפלה הפורמלית כבר הוכחנו שהמקדמים בשני הטורים שווים. לפי הגדרת $\sum_{k<\delta} q_k\omega^{d_k}$ כל ω^{d_k} מופיע במכפלה הפורמלית של $\sum_{i<\alpha'} r_i\omega^{a_i}$ ו- $\sum_{j<\beta} s_j\omega^{b_j}$, ואז הוא בוודאי מופיע במכפלה הפורמלית של $\sum_{i<\alpha'} r_i\omega^{a_i}$ ו- $\sum_{j<\beta} s_j\omega^{b_j}$, או שהוא מופיע בטור $\sum_{j<\beta} r_{\alpha'} s_j\omega^{a_{\alpha'}+b_j}$ וגם אז $\omega^{d_k} = \omega a_{\alpha'} + b_j$ מופיע במכפלה הפורמלית של $\sum_{i<\alpha'} r_i\omega^{a_i}$ ו- $\sum_{j<\beta} s_j\omega^{b_j}$.

כעת נעסוק במקרה בו α ו-β הם סודרים גבוליים. ל- $\gamma < \alpha$ נסמן $A_\gamma = \sum_{i\leq\gamma} r_i\omega^{a_i}$, ו- $A_{\gamma,\alpha} = \sum_{\gamma<i<\alpha} r_i\omega^{a_i}$, ול- $\delta < \beta$ נסמן $B_\delta = \sum_{j<\delta} s_j\omega^{b_j}$, ו- $B_{\delta,\beta} = \sum_{\delta<i<\beta} s_j\omega^{b_j}$. קיים לפי 5.23 $= \left(\sum_{i<\alpha} r_i\omega^{a_i}\right)\left(\sum_{j<\beta} s_j\omega^{b_j}\right)$

$$(A_\gamma + A_{\gamma,\alpha})(B_\delta + B_{\delta,\beta}) = \left(\sum_{i<\alpha} r_i\omega^{a_i}\right) B_\delta + A_\gamma B_{\delta,\beta} + A_{\gamma,\alpha} B_{\delta,\beta} \tag{28}$$

לפי הנחת האינדוקציה כל אחד משני המחוברים השמאליים באגף ימין של (28) שווה למכפלה הפורמלית המתאימה. בסכום שתי מכפלות אלו נכללים כל המחוברים $r_i\omega^{a_i}s_j\omega^{b_j}$ בהם $\gamma \leq i$ או $\delta \leq j$. בין מחוברים אלו נמצאים כל המחוברים המופיעים במכפלה הפורמלית של $\sum_{i<\alpha} r_i\omega^{a_i}$ ו- $\sum_{j<\beta} s_j\omega^{b_j}$ עם מעריך $\leq a_\gamma + b_\delta$ ועוד מחוברים עם מעריך $> a_\gamma + b_\delta$. לכן אם $\sigma > \lambda$ הוא הסודר המקיים $e_\lambda = a_\gamma + b_\delta$ אז סכום שני המחוברים הראשונים ב-(28) הוא $\sum_{k\leq\lambda} p_k\omega^{e_k} + x$, היכן ש-$x$ הוא סכום של מחוברים עם מעריך שהוא לכל היותר $a_{\gamma+1} + b_\delta$ או $a_\gamma + b_{\delta+1}$, ונסמן ב-c את הגדול מבין שני מספרים אלו, $c < a_\gamma + b_\delta = e_\lambda$. לפי 5.13ג' $|x| \leq^* \omega^c << \omega^{e_\lambda}$, וגם המחובר האחרון ב-(28), שנסמנו ב-y, מקיים $|y| \leq^* \omega^{a_{\gamma+1}}\omega^{b_{\delta+1}} << \omega^{a_\gamma+b_\delta} = \omega^{e_\lambda}$. מכיוון ש-(28) הוא המכפלה של שני הטורים קיים $\left(\sum_{i<\alpha} r_i\omega^{a_i}\right)\left(\sum_{j<\beta} s_j\omega^{b_j}\right) = \sum_{k\leq\lambda} p_k\omega^{e_k} + x + y$. מכיוון ש- $x + y << \omega^{e_\lambda}$ לכן פיתוח מכפלה זאת לטור חזקות ω נותן טור שחלקו הראשון הוא $\sum_{k\leq\lambda} p_k\omega^{e_k}$ וחלקו השני מתחיל עם מחובר עם מעריך הקטן מ-e_{a_k}.

מכיוון שמה שהוכחנו עד כה נכון לכל $\gamma < \alpha$ ולכל $\delta < \beta$, הטור של $\left(\sum_{i<\alpha} r_i\omega^{a_i}\right)\left(\sum_{j<\beta} s_j\omega^{b_j}\right)$ מתחיל בטור $\sum_{k<\sigma} p_k\omega^{e_k}$ של המכפלה הפורמלית של שני טורים אלו, ונותר לנו להוכיח שהוא אינו ממשיך מעבר לזאת. נניח שאין הדבר כן והטור של מכפלת המספרים ממשיך מעבר לטור של המכפלה הפורמלית. אז, לפי 5.17ג', יום הבריאה של המכפלה הפורמלית קודם ליום הבריאה של מכפלת המספרים. נוכיח עתה כי המכפלה הפורמלית נמצאת בין האופציות של המכפלה הפורמלית וזה בניגוד למשפט הפשטות האומר שכל מספר נברא ראשון מבין המספרים שבין האופציות שלו. כל האופציות של המכפלה הן בעלות הצורה
$(A_\gamma - r\omega^{a_\gamma})(B_\delta + B_{\delta,\beta}) + (A_\gamma + A_{\gamma,\delta})(B_\delta - s\omega^{b_\delta}(-(A_\gamma - r\omega^{a_\gamma})(B_\delta - s\omega^{b_\delta})$ היכן ש- r, s הם מספרים ממשיים שכל אחד מהם יכול להיות חיובי או שלילי, בהתאם לכך אם האופציה היא שמאלית או ימנית. פיתוח של ביטוי זה נותן

$$A_\gamma B_\delta + A_\gamma B_{\delta,\beta} + A_{\gamma,\alpha} B_\delta - r\omega^{a_\gamma} B_{\delta,\beta} - s\omega^{b_\delta} A_{\gamma,\alpha} - rs\omega^{a_\gamma+b_\delta} \tag{29}$$

הסכום של שלושת המחוברים הראשונים ב-(29) שווה לסכום שני המחוברים הראשונים באגף ימין של (28) וראינו שסכום זה שווה ל- $\sum_{k\leq\lambda} p_k\omega^{e_k} + x$, היכן ש- $|x| << \omega^{e_\lambda}$. $\sum_{k\leq\lambda} p_k\omega^{e_k} = \sum_{k\leq\sigma} p_k\omega^{e_k} - \sum_{\lambda<k<\sigma} p_k\omega^{e_k}$. נסמן את $\sum_{\lambda<k<\sigma} p_k\omega^{e_k}$ ב-z. לפי 5.12ג' $z \leq^* \omega^{e_{\lambda+1}} << \omega^{e_l}$. לכן סכום שלושת המחוברים הראשונים ב-(29) הוא $\sum_{k\leq\sigma} p_k\omega^{e_k} - z + x$. חישוב סידרי הגודל של הערכים המוחלטים של שלושת המחוברים הנוספים ב-(29) נותן, תוך שימוש ב-5.12ג', $|r\omega^{a_\gamma} B_{\delta,\beta}| \leq^* \omega^{a_\gamma}\omega^{b_{\delta+1}} << \omega^{a_\gamma+b_\delta} = \omega^{e_\lambda}$, $|A_{\gamma,\alpha} s\omega^{b_\delta}| \leq^* \omega^{a_{\gamma+1}}\omega^{b_\delta} << \omega^{a_\gamma+b_\delta} = \omega^{e_\lambda}$, $rs\omega^{a_\gamma+b_\delta} = \omega^{e_\lambda}$. כך האופציות של מכפלת המספרים הכתובות ב-(29) שוות ל- $\sum_{k\leq\sigma} p_k\omega^{e_k} + u + rs\omega^{e_\lambda}$, היכן ש-$u$ הוא סכום של ארבעה מחוברים בעלי ערך מוחלט $<< \omega^{e_\lambda}$ ולכן הוא בעצמו בעל ערך מוחלט $<< \omega^{e_\lambda}$. באופציות השמאליות של מכפלת המספרים r ו-s שניהם שליליים או שניהם חיוביים ולכן הן קטנות מטור המכפלה הפורמלית, ובאופציות השמאליות של מכפלת המספרים אחד מ-r ו-s הוא חיובי והשני הוא שלילי ולכן הן גדולות מן המכפלה הפורמלית, וזה מה שהיה עלינו להוכיח.

5.27 משפט. לכל $n \geq 2$ טבעי יש לכל מספר חיובי x שורש n-י.

הוכחה. יהי $x = \sum_{i<\alpha} r_i\omega^{a_i}$. מכיוון ש-$x$ חיובי גם r_0 חיובי. קיים $x = r_0\omega^{a_0}\sum_{i<\alpha}\frac{r_i}{r_0}\omega^{a_i-a_0}$. למספר הממשי החיובי r_0 יש שורש n-י, וגם ל-ω^{a_0} יש שורש n-י $\omega^{\frac{a_0}{n}}$. לכן מה שנותר להוכיח הוא של- $\sum_{i<\alpha}\frac{r_i}{r_0}\omega^{a_i-a_0}$ יש שורש

n-י. זהו טור חזקות ω שעבורו $a_0 = 0$ ו- $r_0 = 1$. לכן נוכיח עתה כי לכל מספר $a = \sum_{i<\alpha} r_i\omega^{a_i}$ עם $a_0 = 0$ ו-$r_0 = 1$ יש שורש n-י. ברור כי למספר a יש צורה כזת אםם הוא $1+\varepsilon$, היכן ש-ε זעירון.

דרך אחת להוכיח קיום שורש n-י למספר כזה היא להשתמש בפיתוח הבינומי של $(1+x)^{\frac{1}{n}}$, שהוא $1 + \frac{1}{n}x + \frac{1}{2}\frac{1}{n}(\frac{1}{n}-1)x^2 + \dots$, ולהוכיח שהשורש ה-$n$-י הנדרש הוא $1 + \frac{1}{n}\varepsilon + \frac{1}{2}\frac{1}{n}(\frac{1}{n}-1)\varepsilon^2 + \dots$, כאשר לסכום זה ניתנת משמעות מתאימה.

אנו נלך בדרך כללית יותר ונגדיר ברקורסיה לכל סודר j, עד סודר מסויים, מספר b_j, שהוא סכום של a_i-ים, וממשי s_j, כך שסדרת ה-b_j-ים יורדת. ל- $j = 0$ נקבע $b_0 = 0$ ו- $s_0 = 1$. ל- $j > 0$, אם $a = \left(\sum_{i<j} s_i\omega^{b_i}\right)^n$ אז הגדרת b_j-ים וה-s_j-ים מסתיימת ו- $\sum_{i<j} s_i\omega^{b_i}$ הוא השורש ה-n-י של a. אחרת, יהי b המספר הראשון בסדר היורד של המעריכים בטורים של a ו- $\left(\sum_{i<j} s_i\omega^{b_i}\right)^n$ כך שהמקדמים של ω^b בטורים של שני מספרים אלו, שנסמנם ב-r וב-t הם שונים, וזה כולל את האפשרות ש-o^b מופיע רק באחד הטורים, ואז נאמר שהמקדם שלו בטור השני הוא 0. מכיוון שהמחובר הראשון בשני הטורים הנ"ל הוא ω^0 לכן $b < 0$. b זה מופיע כמעריך או בטור $\sum_{i<\alpha} r_i\omega^{a_i}$ של a, ואז הוא אחד ה-a_i-ים, או בטור של $\left(\sum_{i<j} s_i\omega^{b_i}\right)^n$ אז הוא סכום של b_i-ים, שכל אחד מהם הוא סכום של a_i-ים. לכן בכל מקרה b הוא סכום של a_i-ים. נסמן $b_j = b$ ונקבע את s_j כך ש- $r = t + ns_j$. מכיוון ש- $s_0\omega^{b_0} = 1$ ו- $b_i < 0$ ל- $0 < i < j$ המחובר בעל המעריך המירבי הנוסף ב- $\left(\sum_{i<j} s_i\omega^{b_i} + s_j\omega^{b_j}\right)^n$ ל- $\left(\sum_{i<j} s_i\omega^{b_i}\right)^n$ הוא המחובר בעל המעריך המירבי ב- $s_j\omega^{b_j}$ $n\left(\sum_{i<j} s_i\omega^{b_i}\right)^{n-1}$ שהוא ns_j. לכן ב- $\left(\sum_{i<j} s_i\omega^{b_i} + s_j\omega^{b_j}\right)^n$ המחוברים עם מעריך גדול מ- b_j הם אותם מחוברים כמו ב- $\left(\sum_{i<j} s_i\omega^{b_i}\right)^n$, ולכן אותם מחוברים כמו ב-a. המחובר בעל המעריך b_j ב- $\left(\sum_{i<j} s_i\omega^{b_i} + s_j\omega^{b_j}\right)^n$ הוא $t+s_j$, ולפי בחירת s_j זהו r, שהוא המקדם של ω^{b_j} ב-a. כך קבלנו שבטורים של $\left(\sum_{i\le j} s_i\omega^{b_i}\right)^n$ ושל a המחוברים עם מעריך $\le b_j$ מתלכדים. יהי $k < j$ אז לפי בחירת b_k הטור של $\left(\sum_{i<j} s_i\omega^{b_i}\right)^n$ מתלכד עם עם הטור של a עד המקום ה-k ועד בכלל. כל המחוברים בטור של $\left(\sum_{i\le k} s_i\omega^{b_i}\right)^n$ הנוספים על אלו של $\left(\sum_{i\le k} s_i\omega^{b_i}\right)^n$ (אם יש כאלו) כולם עם מעריך קטן מ- b_k ולכן גם הטור של $\left(\sum_{i<j} s_i\omega^{b_i}\right)^n$ מתלכד עם עם הטור של a עד המקום ה-k ועד בכלל. מכיוון שאת b_j בחרנו כל שמקדמי ω^{b_j} בשני טורים אלו הם שונים לכן $b_j < b_k$. בכך הוכחנו שסדרת ה-b_j-ים היא יורדת.

תהליך ההגדרה של b_j ו-s_j נעצר רק כאשר אנו מוצאים שורש n-י של a, אולם תהליך זה אינו יכול להמשך לכל הסודרים j כי כל ה-b_j-ים הם סכומים של ה-a_i-ים, והתהליך חייב להעצר כל עוד עוצמת j אינה עולה על עוצמת קבוצת הסכומים הסופיים של ה-a_i-ים.

השיטה בה השתמשנו בהוכחת 5.27 של בניית מספר כנדרש ע"י בחירת מחוברים מתאימים לטור חזקות ω שלו מאפשרת גם הוכחה חלופית לקיום מספר הופכי לכל מספר שאינו 0. יכולנו לעשות את כל מה שעשינו עד כה רק על סמך הידיעה שהמספרים הם חוג סדור, כאשר הפיתוח של המספרי הממשיים נעשה באמצעות המספרים הדיאדיים, ורק עתה להוכיח את קיום ההופכי בשיטה זאת.

5.28 למה. יהי $f(x) = \sum_{k=0}^n h_k x^{n-k}$ פולינום מתוקן (כלומר עם מקדם מוביל 1) שכל מקדמיו סופיים. לכל $0 \le k \le n$ יהי $h_k = r_k + d_k$, היכן ש-r_k ממשי ו-d_k זעירון או 0. בשם החלק התיקני של $f(x)$ נקרא לפולינום $\sum_{k=0}^n r_k x^{n-k}$. אם החלק התיקני של $f(x)$ מתפרק לשני גורמים זרים $p_0(x)$ ו-$q_0(x)$ אז גם $f(x)$ מתפרק לשני גורמים $p(x)$ ו-$q(x)$ שהחלקים התיקניים שלהם הם $p_0(x)$ ו-$q_0(x)$.

הוכחה. נציג את ה-h_k-ים כטורי חזקות ω, נכתוב טורים אלו כמקדמים ב-$f(x)$ ונאסוף, פורמלית, את המחוברים לטור $\sum_{i<\alpha} s_i(x)\omega^{a_i}$, היכן ש-$s_0(x)$ הוא החלק התיקני של $f(x)$, ומכיוון ש- $d_n = 0$ כל פולינום $s_i(x)$ עם $i > 0$ הוא פולינום ממשי ממעלה לכל היותר $n-1$. יהי $p_0(x)q_0(x) = \sum_{k=0}^n r_k x^{n-k}$ פרוק של החלק התיקני של $f(x)$ למכפלה של שני פולינומים זרים שמעלותיהם הן l, m, $l+m = n$. נגדיר ברקורסיה לכל סודר j, עד סודר מסויים, מספר b_j, שהוא סכום של a_i-ים, וזוג פולינומים $p_j(x)$ ו-$q_j(x)$ כך שסדרת ה-b_j-ים יורדת, $p_0(x)$ ו- $q_0(x)$ הם כפי

שקבענו לעיל, ועבור $j > 0$ מעלת $p_j(x)$ היא $\leq l - 1$ ומעלת $q_j(x)$ היא $\leq m - 1$. ל- $j > 0$, במכפלה הפורמלית

$$\left(\sum_{i<j} p_i(x)\omega^{b_i}\right)\left(\sum_{i<j} q_i(x)\omega^{b_i}\right) \tag{30}$$

מקדמי חזקות ω הם ממעלה $\leq n-1$, פרט למקדם ω^0 שהוא $f(x)$. אם המכפלה (30) שווה ל-$f(x)$ אז הגדרת $b_j, p_j(x), q_j(x)$ מסתיימת. ל-j זה נקבע את הפולינומים $p(x)$ ו-$q(x)$ כ- $\sum_{i<j} p_i(x)\omega^{b_i}$ ו- $\sum_{i<j} q_i(x)\omega^{b_i}$ אחרי שסכומים אלו נכתבו כסכומים של חזקות x עם מקדמים שהם סכומי טורים. השוואת המקדמים מראה כי $f(x) = p(x)q(x)$, ומכיוון שברור שהחלקים התיקניים של $p(x)$ ו-$q(x)$ הם $p_0(x)$ ו-$q_0(x)$ אז טענת הלמה הוכחה. במקרה האחר, ש-(30) שונה מ-$f(x)$ יהי b המספר הראשון בסדר היורד של המעריכים בטורים של $f(x)$ ו-(30) כך שהמקדמים של ω^b בטורים אלו, שנסמנם ב-$r(x)$ וב-$s(x)$ הם שונים, וזה כולל את האפשרות ש-o^b מופיע רק באחד הטורים, ואז נאמר שהמקדם שלו בטור השני הוא הפולינום 0. מכיוון שהמחובר הראשון בשני הטורים הנ"ל הוא $x^n\omega^0$ לכן $b < 0$. b זה מופיע כמעריך או בטור של $f(x)$, ואז הוא אחד ה-a_i-ים, או בטור של (30) ואז הוא סכום של b_i-ים, שכל אחד מהם הוא סכום של a_i-ים. לכן בכל מקרה b הוא סכום של a_i-ים. נסמן $b_j = b$, ונקבע פולינומים ממשיים $p_j(x)$ ממעלה $\leq l$ ו- $q_j(x)$ ממעלה $\leq m$ בתקווה שבמכפלה

$$\left(\sum_{i\leq j} p_i(x)\omega^{b_i}\right)\left(\sum_{i\leq j} q_i(x)\omega^{b_i}\right) \tag{31}$$

יש לכל החזקות ω^c עם $c \geq b_j$ אותו מקדם כמו ב-$f(x)$. מכיוון שלשני הכופלים ב-(31) נוספו, בהשוואה לכופלים ב-(30), המחוברים $p_j(x)\omega^{b_j}$ ו- $q_j(x)\omega^{b_j}$ לכן נוספו למכפלה (31) המחובר $(p_0(x)q_j(x) + q_0(x)p_j(x))\omega^{b_j}$ ועוד מחוברים בהם המעריך הוא $< b_j$. לכן ב-(31), כמו ב-(30), מקדמי החזקות ω^c עם $c > b$ שווים למקדמים המתאימים ב-$f(x)$. נבדוק עתה מה קורה עם המקדמים של ω^{b_j} בשני הטורים. מקדמים אלו הם $r(x)$ ב-$f(x)$ ו-$s(x)$ ב-(30), ולכן המקדם של ω^{b_j} ב-(31) הוא $s(x) + p_0(x)q_j(x) + q_0(x)p_j(x)$. לכן כדי לקבל שגם המקדמים של ω^{b_j} ב-$f(x)$ וב-(31) יהיו שווים עלינו לקבוע את $p_j(x)$ ואת $q_j(x)$ כך ש- $p_0(x)q_j(x) + q_0(x)p_j(x) = r(x) - s(x)$. מכיוון ש- $p_0(x)$ ו- $q_0(x)$ זרים ומעלת $r(x) - s(x)$ קטנה מ-n קיימים פולינומים $p_j(x)$ ממעלה $< l$ ו-$q_j(x)$ ממעלה $< m$ כך ששיוויון זה מתקיים. כמו בהוכחת 5.27 אנו מקבלים שלכל $i < j$ $b_j < b_i$ וסידרת ה-b_j-ים יורדת. גם כמו ב-5.27 אנו מקבלים כי תהליך זה חייב להסתיים בסודר j כלשהו שעוצמתו אינה עולה על עוצמת קבוצת הסכומים של ה-a_i-ים.

5.29 משפט. לכל פולינום ממעלה איזוגית שמקדמיו מספרים יש שורש.

הוכחה. נפרק את הפולינום למכפלה של פולינומים אי-פריקים. מכיוון שמעלת הפולינום איזוגית מעלת אחד הגורמים לפחות חייבת גם היא להיות איזוגית. נוכיח שגורם זה הוא לינארי ובכך תסתיים הוכחת המשפט.

נצא, אם כן, מפולינום אי פריק ממעלה איזוגית n, שמעלתו לפחות 3 ונגיע לסתירה. נבצע עתה מספר שינויים בפולינום שאינם משנים את מעלתו ואת היותו אי-פריק, וגם אחרי כל שינוי נמשיך לסמן את הפולינום ב- $a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1x + a_0$.

השינוי הראשון הוא להפוך את הפולינום לפולינום מתוקן ע"י חילוקו ב-a_n.

השינוי השני הוא לאפס את a_{n-1} ע"י הצבת $x - \frac{a_{n-1}}{n}$ עבור x. אם הפולינום הוא כעת x^n אז מכיוון שהוא אי-פריק $n = 1$, בניגוד להנחתנו ש- $n \geq 3$.

אם יש לפולינום מחוברים נוספים על x^n נבצע בו שינוי שלישי שיהפוך את כל מקדמיו למספרים סופיים כך שלפחות אחד המקדמים a_i עם $i < n-1$ אינו זעירון. לשם כך לכל מקדם a_i עם $i < n-1$ שאינו 0 יהי c_i מעריך החזקה במחובר הראשון בפיתוח לטור חזקות ω של a_i, ויהי c הגדול מבין המספרים $\frac{c_i}{n-i}$ עבור i-ים אלו. נציב בפולינום $\omega^c x$ עבור x ונחלק את הפולינום ב-ω^{cn} כדי שהוא ישאר מתוקן. לכן אם $a_i \neq 0$ המחובר המתאים ישתנה תחילה ל- $a_i(\omega^c x)^i = a_i\omega^{ci}x^i$ ואחרי החילוק ב-ω^{cn} ל- $a_i\omega^{-c(n-i)}x^i$, ומעריך החזקה במחובר הראשון בפיתוח של $a_i\omega^{-c(n-i)}$ לטור חזקות ω הוא $c_i - c(n-i)$. לפי בחירת c מעריך זה אינו חיובי, ולכן $a_i\omega^{-c(n-i)}$ הוא סופי, ועבור לפחות i אחד מעריך זה הוא 0 ולכן $a_i\omega^{-c(n-i)}$ אינו זעירון.

קבלנו עתה פולינום אי-פריק $x^n + \sum_{i=0}^{n-2} a_i x^i$ בו כל a_i הוא סופי ולפחות a_i אחד אינו זעירון. לכן החלק התיקני של פולינום זה הוא פולינום ממשי בו לפחות אחד ה-b_i-ים אינו 0. הפולינום $x^n + \sum_{i=0}^{n-2} b_i x^i$ הוא חזקה של פולינום ממשי אי-פריק כי אחרת הוא היה מתפרק למכפלה של שני פולינומים זרים, ולפי 5.28 גם הפולינום $x^n + \sum_{i=0}^{n-2} a_i x^i$ היה אי-פריק, בניגוד להנחתנו. לכן הפולינום $x^n + \sum_{i=0}^{n-2} b_i x^i$ הוא חזקה של פולינום ריבועי או לינארי. פולינום זה לא יכול להיות חזקה של פולינום ריבועי כי n איזוגי, ולכן הוא חזקה של פולינום לינארי $ax + b$. $a = 1$ כי $a_n = 1$ ו- $b = 0$ כי $a_{n-1} = 0$, לכן הפולינום $x^n + \sum_{i=0}^{n-2} b_i x^i$ הוא x^n, בניגוד למה שאמרנו שלפחות אחד ה-b_i-ים אינו 0.